Trabajo de investigación

El haz tangente de foliaciones holomorfas

Antonio J. Pan

Curso 2006-2007

Introducción

La teoría de foliaciones holomorfas se ha desarrollado fundamentalmente desde hace unos veinte años, aunque sus raíces más clásicas se remontan al siglo XIX. Se trata de una línea de investigación muy activa en la actualidad, y que involucra diversos campos de las matemáticas: la geometría diferencial y la topología, la geometría algebraica, la teoría de singularidades...

Una ecuación diferencial ordinaria definida en una variedad M puede ser interpretada como un campo de vectores, de manera que una solución de la ecuación es una curva cuyo vector tangente en un punto $p \in M$ es el vector del campo en dicho punto. Si en lugar de dicho campo tomamos uno proporcional a él la parametrización de las curvas solución puede cambiar, pero no las curvas en sí. Algo análogo sucede con las ecuaciones en derivadas parciales, pues pueden ser interpretadas como un campo de k-planos del correspondiente espacio tangente de M (verdaderamente, como un campo de vectores normales a ellos), y sus soluciones son k-variedades tangentes a esos k-planos. En ambos casos las soluciones nos están dando una descomposición de M en subvariedades de dimensión menor. Se puede decir que la teoría de foliaciones estudia las soluciones de ecuaciones diferenciales salvo parametrizaciones.

Sea M una variedad compleja de dimensión n. Básicamente, una foliación holomorfa de codimensión r consiste en asignar a cada punto de M un subespacio vectorial de dimensión $n-r$ del espacio tangente holomorfo. Obtenemos así una distribución, a la que se le exige que sea integrable (condición de Frobenius). Diremos que la foliación en M tiene singularidades si existe un subconjunto analítico de M en el que no está definida la distribución.

Los dos casos en que este estudio está más desarrollado son los de codimensión $n-1$ y 1. En el primero la foliación está dada localmente por un campo de vectores, y las hojas (subvariedades integrales) son las superficies de Riemann que son trayectorias de las soluciones de la ecuación diferencial que determina dicho campo.

En el caso de codimensión 1, una foliación viene dada localmente por una 1-forma diferencial holomorfa. Si tomamos un recubrimiento por abiertos de la variedad M, en cada uno de ellos U_α tenemos una 1-forma holomorfa integrable ω_α que define la foliación, y al considerar dos abiertos U_α y U_β que se cortan tenemos una función holomorfa $g_{\alpha\beta}$ que no se anula en la intersección de los dos, y de modo que $\omega_\alpha = g_{\alpha\beta}\omega_\beta$. El lugar singular viene dado por los puntos p que están en alguno de los abiertos U_α y de modo que $\omega_\alpha(p) = 0$. Las funciones $g_{\alpha\beta}$ verifican las condiciones de cociclo, definiendo un fibrado lineal. Así la foliación viene dada por una sección global holomorfa del fibrado $\Omega^1_M \otimes L$.

El presente texto es una memoria de la labor investigadora realizada durante el curso académico 2006/2007, correspondiente al periodo de investigación del Programa de Doctorado

“Matemáticas” de la Universidad de Cádiz, bajo la dirección del doctor Luis Giraldo Suárez.

En el desarrollo del trabajo de investigación, los esfuerzos han sido dirigidos en dos direcciones principales. Una ha sido la de asimilar y esclarecer los conceptos principales de la teoría de foliaciones holomorfas. En particular se ha trabajado para demostrar la equivalencia entre dos definiciones alternativas del concepto de foliación que, aunque aparecen indistintamente en la literatura, no se ha encontrado publicada una demostración.

La otra dirección ha sido un primer intento de resolver un problema abierto, planteado en un artículo de reciente aparición ([4]), y que es uno de los objetivos de la futura tesis del doctorando. Aunque el problema no está resuelto, se han conseguido resultados parciales que, aunque modestos, pueden desempeñar un papel clave para su resolución.

El texto está dividido en tres capítulos. En el primero de ellos se establece la notación básica y se introducen los principales conceptos. La parte de foliaciones está tratada con especial detalle, y en ella se demuestra que en el espacio proyectivo es indiferente definir foliaciones como determinados subhaces del haz tangente o como k-formas diferenciales “twistadas”.

En el segundo se realiza una aproximación informal al problema a resolver para situar el contexto en el que está planteado: la clasificación de foliaciones holomorfas en el espacio proyectivo.

Por último, en el tercer capítulo se hace una memoria sobre las distintas líneas de investigación seguidas a lo largo del año académico; y se enuncian y demuestran los resultados obtenidos.

Integrado en el texto se incluye un programa realizado en Mathematica que ha tenido una gran importancia para llevar a cabo la investigación, pues ha posibilitado trabajar con numerosos ejemplos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo vamos a introducir la teoría matemática necesaria para el planteamiento y comprensión del problema a resolver, y fijaremos la notación que se utilizará a lo largo del texto. No obstante, el texto está lejos de ser autocontenido y abundan las referencias externas debido a la gran cantidad de conceptos involucrados en esta teoría.

1.1. Fibrados y haces en variedades complejas

Definición 1.1.1 *Dada una variedad compleja M, un fibrado vectorial holomorfo de rango k es una variedad compleja E junto con una aplicación holomorfa sobreyectiva*

$$\pi : E \longrightarrow M$$

de manera que existe una recubrimiento por abiertos de M, $\{U_\alpha\}$, tal que:

- *Para $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión k denotado $E(x)$ y llamado fibra sobre x.*
- *Para cada α existe un biholomorfismo*

  $$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

  tal que $\varphi_\alpha(E(x)) \subseteq \{x\} \times \mathbb{C}^k$ y además, $\varphi_\alpha|_{E(x)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dados dos fibrados vectoriales holomorfos E y F sobre M, con $F \subseteq E$, de rangos k_1 y k_2, $k_2 \leq k_1$, diremos que F es subfibrado de E si $F \cap E(x)$ es subespacio vectorial de $E(x)$ y existen trivializaciones locales de E y F que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^{k_1} \\ \uparrow i & & \uparrow id \times j \\ F|_U & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^{k_2} \end{array}$$

donde i es la inclusión de $F|_U$ en $E|_U$ y j la inclusión canónica de $\mathbb{C}^{k_2}$ en $\mathbb{C}^{k_1}$

Un fibrado vectorial holomorfo de rango 1 será llamado fibrado de línea.

Definición 1.1.2 *Sean E y F dos fibrados vectoriales holomorfos sobre M. Llamaremos homomorfismo de fibrados holomorfo a una aplicación holomorfa:*

$$f : E \longrightarrow F$$

que preserva las fibras y que es $\mathbb{C}$-lineal en cada una de ellas, es decir, para cada $x \in M$

$$f|_{E(x)} : E(x) \longrightarrow F(x)$$

es una aplicación lineal.

Proposición 1.1.3 *Sea $f : E \to F$ un homomorfismo holomorfo de fibrados de manera que $f|_{E(x)}$ tiene rango constante en x. Entonces*

$$Ker(f) = \bigcup_{x \in M} Ker(f|_{E(x)})$$

e

$$Im(f) = \bigcup_{x \in M} Im(f|_{E(x)})$$

son subfibrados vectoriales holomorfos contenidos en E y F respectivamente.

A continuación vamos a presentar algunas generalidades sobre teoría de haces. La mayoría de las definiciones y proposiciones presentadas a continuación son válidas para un espacio topológico arbitrario, pero en nuestro contexto nos centraremos en una variedad compleja M. Para más información consultar [WE], [OSS] y [HA].

Definición 1.1.4 *Sea M una variedad compleja.Un prehaz $\mathcal{S}$en M es:*

- *Una asignación de un conjunto $\mathcal{S}(U)$ a cada abierto $U \subseteq M$ no vacío.*
- *Una colección de aplicaciones*

  $$r^U_V : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}(V)$$

  para cada par de abiertos U y V, satisfaciendo

  1. *r^U_U es la identidad en U.*
  2. *Para $W \subseteq V \subseteq U$, $r^U_W = r^V_W \circ r^U_V$*

En nuestro contexto exigiremos que los conjuntos $\mathcal{S}(U)$ posean una determinada estructura algebraica: que sean anillos, grupos, etcétera.

Por otra parte, llamamos *tallo* de $\mathcal{S}$ en $x \in M$ al límite directo

$$\mathcal{S}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{S}(U)$$

Definición 1.1.5 *Dado un prehaz $\mathcal{S}$, diremos que es un haz cuando para cada colección de abiertos $\{U_i\}$ tal que $U = \bigcup U_i$ se verifiquen:*

1. *Si* $s, t \in \mathcal{S}(U)$ *y* $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ *para cada* i, *entonces* $s = t$.

2. *Si* $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$ *y para cada* $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ *tenemos*

$$r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$$

entonces existe $s \in \mathcal{S}(U)$ *tal que* $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

En particular, y a modo de ejemplo, al ser M una variedad compleja hay un haz de anillos que refleja toda la estructura compleja. Se llama haz de estructura y vendrá denotado por $\mathcal{O}_M$. Se define por

$$\mathcal{O}_M(U) = \{f : U \to \mathbb{C}, \quad f \text{ holomorfa}\}$$

Definición 1.1.6 *Un morfismo de haces sobre* M, $f : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$, *es una colección de aplicaciones* $\{f_U : U \subseteq M \text{ abierto}\}$ *de modo que*

$$f_U : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{R}(U)$$

es un morfismo que conserva la estructura algebraica existente en $\mathcal{S}(U)$ *y* $\mathcal{R}(U)$ *y de manera que para* $V \subseteq U$ *abiertos de* M:

$$\begin{array}{rccc} f_U : & \mathcal{S}(U) & \longrightarrow & \mathcal{R}(U) \\ & \downarrow r^U_V & & \downarrow \rho^U_V \\ f_V : & \mathcal{S}(V) & \longrightarrow & \mathcal{R}(V) \end{array}$$

donde r^U_V *y* ρ^U_V *son los morfismos restricción de* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{R}$.

Definición 1.1.7 *Sea* $\mathcal{R}$ *un haz de anillos conmutativos y* $\mathcal{M}$ *un haz de grupos abelianos, ambos sobre* M. *Supongamos que para cada abierto* $U \subseteq X$, $\mathcal{M}(U)$ *es un* $\mathcal{R}(U)$*-módulo tal que si* $\alpha \in \mathcal{R}(U)$ *y* $f \in \mathcal{M}(U)$ *entonces:*

$$r^U_V(\alpha f) = \rho^U_V(\alpha) r^U_V(f)$$

para $V \subseteq U$, *donde* r^U_V *y* ρ^U_V *son los correspondientes morfismos restricción. Decimos entonces que* $\mathcal{M}$ *es un haz de* $\mathcal{R}$*-módulos.*

En particular nos interesaremos por los haces de $\mathcal{O}_M$-módulos, también llamados haces analíticos.

Definición 1.1.8 *Dado un haz de* $\mathcal{O}_M$*-módulos,* $\mathcal{M}$, *sobre* M, *diremos que es localmente libre si para cada* $x \in M$ *existe un entorno abierto* U *tal que*

$$\mathcal{M}(U) \simeq \mathcal{O}_M(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_M(U)$$

Este tipo de haces están relacionados con los fibrados vectoriales:

Teorema 1.1.9 *Sea* M *una variedad compleja. Hay una correspondencia uno a uno entre clases de isomorfismo de fibrados sobre* M *y clases de isomorfismo de haces analíticos localmente libres.*

La demostración puede leerse en [WE].

Tenemos, pues, que un haz analítico localmente libre es un fibrado vectorial holomorfo y viceversa. Dado un fibrado vectorial holomorfo E sobre M y un abierto $U \subset M$, podemos considerar el conjunto E(U) de las aplicaciones holomorfas

$$s : U \longrightarrow E$$

tales que $\pi \circ s = id$, que serán llamadas secciones sobre U. De esta forma, se puede demostrar que E es un haz. Recíprocamente, todo haz localmente libre es el haz de secciones de un determinado fibrado. A lo largo del texto usaremos la misma notación para un fibrado y su haz de secciones. Además, hay también una relación uno a uno entre homomorfismos holomorfos de fibrados y morfismos de haces.

No obstante, es conveniente observar que existen morfismos que desde el punto de vista de haces son inyectivos, pero en la categoría de fibrados no. En particular, es posible tomar dos haces localmente libres de manera que aunque uno sea subhaz del otro, no es subfibrado.

Basta, por ejemplo, con considerar en $\mathbb{C}^2$ el fibrado trivial de rango 1, cuyo haz localmente libre asociado son las funciones holomorfas y el morfismo de haces

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U) \\ f(x,y) & \longrightarrow & x \cdot f(x,y) \end{array}$$

Este morfismo de haces es inyectivo, pero el morfismo de fibrados asociado no.

Como hemos visto, los haces localmente libres son aquellos que localmente son módulos libres finitamente generados. Los que únicamente son finitamente presentados reciben el nombre de haces coherentes:

Definición 1.1.10 *Dado un haz de $\mathcal{O}_M$-módulos, $\mathcal{M}$, sobre M, diremos que es coherente si para cada $x \in M$ existe un entorno abierto U y una sucesión exacta*

$$\bigoplus_s \mathcal{O}_M(U) \longrightarrow \bigoplus_r \mathcal{O}_M(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

Los haces coherentes son una generalización del concepto de fibrado vectorial en el siguiente sentido:

En la proposición 1.1.3 hemos exigido que el homomorfismo de fibrados f tenga rango constante a fin de que $Ker(f)$ e $Im(f)$ sean a su vez fibrados. Si eliminamos esta exigencia y pensamos en los fibrados como haces y el homomorfismo de fibrados como un morfismo de haces, lo que sí se puede asegurar es que $Ker(f)$ e $Im(f)$ son haces coherentes.

Es más, si partimos de haces coherentes en lugar de localmente libres, $Ker(f)$ e $Im(f)$ heredan la coherencia. Con otras palabras: *los haces coherentes son la menor familia de haces de manera que para cualquier morfismo f, $Ker(f)$ e $Im(f)$ siguen perteneciendo a la familia.* Una demostración de este hecho puede leerse en [FR, Capítulo 2].

A lo largo del texto, dado un haz coherente $\mathcal{S}$, denotaremos:

$$\mathcal{S}(x) = \frac{\mathcal{S}_x}{\mathfrak{m}_x \mathcal{S}_x}$$

Observemos que esta notación coincide, en caso de que el haz sea localmente libre, con la fibra de $\mathcal{S}$ visto como fibrado vectorial holomorfo.

Definición 1.1.11 *Dado un haz coherente $\mathcal{S}$ en una variedad compleja M, definimos su lugar singular como:*

$$Sing(\mathcal{S}) = \{x \in M : \mathcal{S}_x \text{ no es } (\mathcal{O}_M)_x\text{-módulo libre}\}$$

Así, en $M \setminus Sing(\mathcal{S})$, el haz es localmente libre, y por tanto define un fibrado. Además, $Sing(\mathcal{S})$ es un subconjunto analítico de M de codimensión al menos 1 (ver [OSS, pág. 145]).

Por último, mencionar que la principal herramienta algebraica con la que contamos para el estudio de los haces es la cohomología. Dado un haz $\mathcal{S}$ en una variedad compleja M, su i-ésimo grupo de cohomología es un grupo denotado por:

$$H^i(M, \mathcal{S})$$

Se tiene que $H^0(M, \mathcal{S}) = \mathcal{S}(M)$, y dada una sucesión exacta corta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

existe una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{rl} 0 \longrightarrow & H^0(M,\mathcal{A}) \longrightarrow H^0(M,\mathcal{B}) \longrightarrow H^0(M,\mathcal{C}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{A}) \longrightarrow \dots \\ \longrightarrow & H^q(M,\mathcal{A}) \longrightarrow H^q(M,\mathcal{B}) \longrightarrow H^q(M,\mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(M,\mathcal{A}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

La construcción y el resto de propiedades de tales grupos puede ser leída en [WE].

1.2. Teorema de Frobenius

Definición 1.2.1 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Llamaremos distribución holomorfa a una aplicación $\mathcal{D}$ que a cada punto $x \in M$ le asigna un subespacio k-dimensional de T_xM, tal que en un entorno de cada punto existen k campos de vectores holomorfos $X_1, \dots, X_k$ tales que*

$$\mathcal{D}(x) = \langle X_1(x), \dots, X_k(x) \rangle$$

en todo el entorno.

Una distribución puede ser interpretada como un subfibrado de TM. Para ello, dados abiertos tales que $U \cap V \neq \emptyset$, basta con considerar las aplicaciones ρ_U y ρ_V que llevan los vectores que definen la distribución a los vectores canónicos y tomar como transiciones del subfibrado

$$\rho_V \circ \frac{\partial \varphi_{UV}}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \rho_U^{-1}$$

donde φ_{UV} es el cambio de coordenadas de U a V.

Otra posible interpretación del concepto de distribución pasa por considerar el fibrado grassmanniano $G_k(M)$, que es el fibrado (no vectorial) cuya fibra en $x \in M$ es $G(k, T_xM)$, la grassmanniana de k-planos de T_xM. Se puede comprobar que se trata de una variedad holomorfa, y que la proyección canónica

$$\pi : G_k(M) \longrightarrow M$$

tal que para $\Lambda \in G(k, T_xM)$ es $\pi(\Lambda) = x$ es aplicación holomorfa. En este contexto, una distribución no es más que una aplicación holomorfa

$$\mathcal{D} : M \longrightarrow G_k(M)$$

tal que $\pi \circ \mathcal{D} = id_M$, es decir, una sección del fibrado grassmanniano.

Se dice que una distribución $\mathcal{D}$ es integrable cuando dados dos campos de vectores holomorfos X e Y contenidos en la imagen de $\mathcal{D}$, entonces $[X, Y] \in \mathcal{D}$.

Teorema 1.2.2 (Frobenius) *Sea $\mathcal{D}$ una distribución holomorfa en M. $\mathcal{D}$ es integrable si y sólo si para cada $x \in M$ existe una única subvariedad inmersa S de M pasando por x, tal que en cada punto $y \in S$ se tiene $T_yS = \mathcal{D}_y$.*

La demostración es análoga a la del caso diferenciable, que puede leerse en [WA, p.41].

La situación anterior tiene un enfoque dual, que involucra formas holomorfas definidas en M. Sea

$$\Omega_M^* = \bigoplus_{r \geq 0} \Omega_M^r$$

el fibrado de formas holomorfas de M.

Definición 1.2.3 *Sea $\mathcal{D}$ una distribución holomorfa de dimensión p. Se dice que una q-forma ω anula a $\mathcal{D}$ si para cada $x \in M$*

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_q) = 0 \textit{ para cualesquiera } v_1, \ldots, v_q \in \mathcal{D}(x)$$

Una forma $\omega \in \Omega_M^*$ anula a $\mathcal{D}$ si lo hace cada sumando homogéneo. Definimos

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{\omega \in \Omega_M^* : \omega \textit{ anula a } \mathcal{D}\}$$

Para una distribución $\mathcal{D}$ se tiene:

- $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es un ideal en Ω_M^*.
- $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ está generado localmente por $(n-p)$ 1-formas independientes.
- Cualquier ideal $\mathcal{I}$ de Ω_M^* generado localmente por $(n-p)$ 1-formas independientes es $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{D})$ para cierta distribución holomorfa p-dimensional de M.

Es decir, hay una relación uno a uno entre distribuciones e ideales del álgebra graduada Ω_M^* localmente generados por 1-formas.

Proposición 1.2.4 *Una distribución $\mathcal{D}$ en M es integrable si y sólo si el ideal $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ es cerrado bajo la derivada exterior, es decir*

$$d(\mathcal{I}(\mathcal{D})) \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{D})$$

La demostración, también en el caso C^∞, puede leerse en [WA].

La condición de la proposición anterior se traduce en que si $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ está generado localmente por

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p} \in \Omega_M^1(U)$$

entonces

$$\mathrm{d}\alpha_i \in \mathcal{I}(\mathcal{D}) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p} \rangle$$

En este caso, se dice que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}\}$ forman un sistema integrable.

Definición 1.2.5 *Una p-forma diferencial $\omega \in \Omega_M^p(M)$ es integrable si para cada $x \in M$ tal que $\omega(x) \neq 0$ existe un entorno V y un sistema integrable de 1-formas $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \Omega_M^1(V)$ tal que $\omega|_V = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$.*

Así, una p-forma holomorfa integrable está definiendo una distribución holomorfa integrable, pues si

$$\omega|_V = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_p$$

entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ y $\beta_1, \ldots, \beta_p$ generan el mismo ideal.

En particular, la distribución generada es el núcleo del morfismo

$$\widetilde{\omega} : TM \to \Omega_M^{p-1}$$

donde si $v \in T_x\mathbb{P}^n$

$$\widetilde{\omega}_x(v) = \omega_x(v, -)$$

1.3. El espacio proyectivo complejo

Denotaremos por $\mathbb{P}^n$ al espacio proyectivo complejo de dimensión n, que es el conjunto de rectas que pasan por el origen de $\mathbb{C}^{n+1}$. Se define como el conjunto cociente

$$\frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

donde si $x, y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, se tiene $x \sim y$ si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de modo que $x = \lambda y$.

Tenemos la proyección canónica:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & (z_0, \ldots, z_n) & \longrightarrow & [z_0 : \cdots : z_n] \end{array}$$

El espacio proyectivo tiene estructura de variedad compleja, con la cual la proyección π es una aplicación holomorfa. El atlas está formado por los abiertos

$$U_i = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$$

con coordenadas:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_i : & U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : \cdots : z_n] & \longrightarrow & (\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}) \end{array}$$

A lo largo del texto, a menudo se parte del espacio $\mathbb{C}^n$ y se comleta a $\mathbb{P}^n$. Esto no es más que identificar $\mathbb{C}^n$ con el abierto U_0 del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$, o lo que es lo mismo, considerar la inclusión

$$\begin{array}{cccc} i : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & [1 : x : y : z] \end{array}$$

1.3.1. Clases de Chern de fibrados de línea en $\mathbb{P}^n$

Los fibrados vectoriales del espacio proyectivo han sido ampliamente estudiados (ver por ejemplo [OSS] y [FR]). En particular, es conocido que los fibrados de línea en $\mathbb{P}^n$ vienen determinados salvo isomorfismo holomorfo por un número entero, la clase de Chern. Recordemos esto.

La sucesión exacta de haces (sucesión exponencial, ver [WE] página 45)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{exp} \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

donde

- $\mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^n}$ es el haz de funciones holomorfas nunca nulas
- $\mathbb{Z}$ el haz constante de los enteros,
- $exp_U(f)(z) = exp(2\pi i f(z))$

tiene asociada una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \cdots$$

Es conocido (por ejemplo [OSS, pág. 8]) que

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = H^2(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$$

y por otra parte

$$H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

luego

$$H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*) \cong \mathbb{Z}$$

Si interpretamos un fibrado de línea como una clase en $H^1(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}^n})$ (consultar [GH, p. 133] para ver por qué), la clase de Chern del fibrado se define como su imagen en $\mathbb{Z}$ mediante el isomorfismo anterior.

Se tiene que el fibrado de línea con clase de Chern m, denotado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$, tiene sus secciones globales en relación uno a uno con los polinomios homogéneos de grado m en $n+1$ variables:

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \simeq \{\text{polinomios homogéneos de grado } m\}$$

Observemos que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0)$ es el fibrado trivial.

Para más información, consultar [GH].

1.3.2. Sucesión de Euler

Recordemos (ver [GH, p. 409]) la sucesión exacta de Euler:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \bigoplus_{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0$$

Dado un fibrado o, en general, un haz coherente $\mathcal{S}$, definiremos para $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{S}(m) = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$$

Tensorizando la sucesión anterior con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \longrightarrow \bigoplus_{n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m+1) \longrightarrow T\mathbb{P}^n(m) \longrightarrow 0$$

Si dualizamos la sucesión de Euler y tomamos la p-ésima potencia exterior se obtiene la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{\mathbb{P}^n}(p) \longrightarrow \bigoplus_{\binom{n+1}{p}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\mathbb{P}^n}(p) \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

Para más información consultar [OSS].

1.4. Foliaciones holomorfas singulares en $\mathbb{P}^n$

Una foliación de una determinada variedad M no es más que dar una descomposición de la misma en subvariedades de dimensión menor llamadas hojas. Por ejemplo se puede foliar el espacio euclídeo tridimensional considerando que se trata de un "apilamiento" de infinitos planos euclídeos uno encima de otro. Cuando una variedad admite una foliación entonces localmente tiene una estructura topológica de variedad producto.

La idea de foliación holomorfa, con o sin singularidades, aparece vinculada a la resolución y estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales holomorfas. En concreto, las soluciones de una tal ecuación definen, en el espacio donde esté definida, una foliación. Luego el conocimiento de las propiedades de las foliaciones se revela fundamental para poder obtener toda la información posible de las soluciones de una ecuación, incluso cuando no pueda ser resuelta. Pero las foliaciones también tienen interés porque aparecen en otros contextos completamente distintos, por ejemplo en las acciones de grupos holomorfos.

1.4.1. Foliaciones holomorfas

En primer lugar vamos a comenzar por definir el concepto de foliación holomorfa sin singularidades en una variedad compleja. Lo haremos utilizando varias definiciones cuya equivalencia probaremos a continuación.

Definición 1.4.1 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k, o codimensión $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, es un atlas de M dado por cartas coordenadas (U_i, φ_i) de modo que si las transiciones*

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \bigcap U_j) \to \varphi_i(U_i \bigcap U_j)$$

se escriben en coordenadas

$$\varphi_{ij}(z_1, \ldots, z_n) = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)$$

entonces se satisface

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial z_l} = \cdots = \frac{\partial \varphi^{n-k}}{\partial z_l} = 0$$

para $l = n-k+1, \ldots, n$.

Es decir, se trata de describir M mediante unas "cartas distinguidas", de manera que en los cambios las k últimas coordenadas son las únicas que dependen de las últimas k variables. El significado geométrico subyacente es la existencia en $\varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ de unos subconjuntos invariantes por cambios de coordenadas

$$\{z_1 = k_1, \ldots, z_{n-k} = k_{n-k}\}, \qquad (k_1, \ldots, k_{n-k}) \in \mathbb{C}^{n-k}$$

cuyas imágenes en M, por tanto, pueden ser extendidas, definiendo subvariedades llamadas hojas.

Es claro que para cada $x \in M$ existe una única hoja que pasa por x, que denotaremos por L_x, y por tanto

$$M = \bigcup_{x \in M} L_x$$

Definición 1.4.2 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Llamamos foliación holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k, o codimensión $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, a un subfibrado integrable de TM de rango k.*

Se suele denotar al fibrado por $T\mathcal{F}$. Desde este punto de vista, una foliación no es más que una distribución integrable.

Definición 1.4.3 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k, o codimensión $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, consiste en:*

- *Una colección de abiertos $\{U_\alpha\}$ que recubren M.*

- *Una colección de $(n-k)$-formas diferenciales holomorfas integrables y nunca nulas, $\{\omega_\alpha\}$, donde cada ω_α está definida en el correspondiente U_α.*

- *Una colección de funciones holomorfas nunca nulas, $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$, donde $\lambda_{\alpha\beta}$ está definida en $U_\alpha \cap U_\beta$ y de manera que en este abierto $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega_\beta$.*

Supongamos otras familias $\{V_\beta\}$, $\{\theta_\beta\}$ y $\{\mu_\beta\}$ verificando las condiciones de la definición. Podemos suponer $\{V_\beta\} = \{U_\alpha\}$, pues si no bastaría con reducir los abiertos lo suficiente. Entonces observemos que van a definir la misma foliación si para cada α es $\theta_\alpha = h_\alpha\omega_\alpha$ y existe una familia $\{f_\alpha\}$, con $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$, de manera que $\lambda_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}\mu_{\alpha\beta}$.

Definición 1.4.4 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Una foliación holomorfa $\mathcal{F}$ de dimensión k, o codimensión $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, consiste en una sección holomorfa integrable y nunca nula del fibrado $\Omega_M^{n-k} \otimes \mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es un fibrado de línea en M que depende de la foliación.*

Una tal sección suele ser llamada informalmente "forma twistada". Observemos que dos de ellas definen la misma foliación si existe una función holomorfa que no se anule en M de manera que una sea la otra multiplicada por dicha función.

A continuación vamos a dar algunas directrices para comprobar las equivalencias entre las definiciones:

1. <u>1.4.1 equivale a 1.4.2</u>.
   Para cada $x \in M$ consideramos el espacio vectorial $T_xL_x \subseteq T_xM$, generado por los k últimos vectores de la base asociada a una carta distinguida de x. El conjunto

   $$T\mathcal{F} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_xL_x$$

   puede ser dotado de estructura de fibrado vectorial holomorfo de rango k sobre M, y cuya transición en $U_i \cap U_j$ es el último menor diagonal de rango k de la matriz

   $$\frac{\partial(\varphi_{ij}^1, \ldots, \varphi_{ij}^n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}$$

   transición del fibrado tangente de M.

   Se trata, pues, de un subfibrado de TM, es decir, de una distribución, que evidentemente es integrable, pues las hojas son subvariedades inmersas que cumplen las condiciones del Teorema de Frobenius.

   Recíprocamente, dado $T\mathcal{F}$ un subfibrado integrable de TM, en la demostración del Teorema de Frobenius (ver [WA]) se observa la existencia de una cartas que describen M y cuya base del tangente asociada es tal que en cada $x \in M$ los últimos k-vectores generan el espacio vectorial $T\mathcal{F}(x)$.

2. 1.4.2 equivale a 1.4.3.
   Dado un subfibrado integrable, $T\mathcal{F}$, podemos identificarlo con una sección del fibrado grassmanniano $G_k(TM)$. Si consideramos el isomorfismo de $G_k(TM)$ con su dual $G_{n-k}(TM^*)$ y utilizamos el encaje estándar (inmersión de Plucker: $G_k(V) \longrightarrow \mathbb{P}(A^k V)$) de $G_{n-k}(TM^*)$ en $\mathbb{P}(\Omega_M^{n-k})$ podemos interpretar la foliación como una sección holomorfa

$$s_{\mathcal{F}} : M \longrightarrow \mathbb{P}(\Omega_M^{n-k})$$

   Así pues, dado $x \in M$, puedo tomar un entorno abierto suficientemente pequeño U_x y una $(n-k)$-forma diferencial holomorfa ω_x definida en él de manera que

$$\begin{array}{rll} s_{\mathcal{F}}: & U_x & \longrightarrow \mathbb{P}(\Omega_M^{n-k})|_{U_x} \\ & y & \longrightarrow [\omega_x(y)] \end{array}$$

   Si $U_x \bigcap U_y \neq \emptyset$, en la intersección tendremos dos $n-k$-formas, ω_x y ω_y. Para cada $z \in U_x \bigcap U_y$, $[\omega_x(z)] = s_{\mathcal{F}}(z) = [\omega_y(z)]$, luego existe $\lambda_z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tal que $\omega_x(z) = \lambda_z \omega_y(z)$. Para comprobar que la asignación

$$z \longrightarrow \lambda_z$$

   es holomorfa basta con observar que se puede encontrar un entorno de z que trivialice al fibrado Ω_M^{n-k}, en el que ω_x y ω_y se escriben en coordenadas holomorfas.

   Por tanto, la foliación está determinando:

   - Una colección de abiertos $\{U_\alpha\}$ que recubren M.
   - Una colección de campos de $(n-k)$-formas diferenciales holomorfas nunca nulas, $\{\omega_\alpha\}$, donde cada ω_α está definido en el correspondiente U_α.
   - Una colección de funciones holomorfas nunca nulas, $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$, donde $\lambda_{\alpha\beta}$ está definida en $U_\alpha \cap U_\beta$ y de manera que en este abierto $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega_\beta$.

   Queda comprobar que cada ω_α es integrable. Entonces, teniendo en cuenta la proposición 1.2.4 y la definición 1.2.5, ω_α es integrable, pues está definiendo la distribución de partida, que es integrable.

   Recíprocamente, dada las colecciones $\{U_\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$ verificando las condiciones de la definición 1.4.3, vamos a definir un subfibrado integrable de TM. Supongamos $x \in U_\alpha$ para cierto α. Definimos $F_x = Ker(\omega_\alpha(x)) \subseteq T_x M$, subespacio vectorial de dimensión k, por ser $\omega_\alpha(x)$ descomponible, y

$$F = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times F_x$$

   Cada F_x está bien definido, pues si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $Ker(\omega_\alpha(x)) = Ker(\lambda_{\alpha\beta}(x)\omega_\beta(x)) = Ker(\omega_\beta(x))$.

   Veamos que F tiene estructura de fibrado vectorial complejo. Dado un punto $x \in M$, puedo tomar un entorno suyo, $U \subseteq U_\alpha$, en el que el fibrado TM venga descrito por un marco $\{e_i\}$. Además, U puede ser tomado de manera que w_α venga expresada mediante funciones holomorfas. Tenemos que $F|_U$ es el núcleo de un morfismo de fibrados de rango constante

$$TM|_U \longrightarrow \Omega_M^{n-k-1}|_U$$

luego es un fibrado. Pero además podemos tomar U de manera que $F|_U$ sea el fibrado trivial, y así, si $\{g_{UV}\}$ son las transiciones de TM, entonces $\{p_V^{-1} \circ g_{UV}|_{F|_{U\cap V}} \circ p_U\}$ son las transiciones de F, donde

$$p_U : U \times \mathbb{C}^k \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$$

con $p_U(x, \cdot)$ una parametrización lineal de F_x. La integrabilidad de este fibrado puede leerse en [12, Prop. 1.2.2.].

3. 1.4.3 equivale a 1.4.4.

   Sean las colecciones $\{U_\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ y $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$ verificando las condiciones de la definición 1.4.3. En esta situación, $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$ verifica la condición de cociclo, luego definen un fibrado de línea que llamaremos $\mathcal{L}$. Además, claramente $\{\omega_\alpha\}$ define sección holomorfa de $\Omega_M^{n-k} \otimes \mathcal{L}$, que es integrable y nunca nula.

   Recíprocamente, consideremos una sección holomorfa

   $$s : M \longrightarrow \Omega_M^{n-k} \otimes \mathcal{L}$$

   El fibrado $\mathcal{L}$ puede ser interpretado como la clase de un cociclo, es decir, como una colección U_α de abiertos recubriendo M y una colección de funciones holomorfas nunca nulas, $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$, definidas en las intersecciones $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. En cada U_α la sección s puede interpretarse como una $(n-k)$-forma w_α holomorfa y nunca nula.

1.4.2. Foliaciones holomorfas singulares en $\mathbb{P}^n$

Las foliaciones holomorfas, a pesar de su importancia, son insuficientes. Por ejemplo, en el ámbito de las ecuaciones diferenciales es interesante el estudio de sus singularidades, es decir, puntos donde el espacio tangente que define la ecuación se colapsa, y en los que por tanto la estructura de la solución es mucho más compleja y variada. Pero la idea de foliación holomorfa presentada anteriormente no contempla esta posibilidad.

Otra razón fundamental por la cual el concepto de foliación holomorfa se manifiesta como insuficiente es la siguiente. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una extensión natural del espacio afín $\mathbb{C}^n$ cuya importancia es de sobra conocida. Según [OSS, Lema 4.1.2], el fibrado tangente de $\mathbb{P}^n$ es indescomponible, y por tanto no puede tener subfibrados. Por ello, el espacio proyectivo no puede tener foliaciones holomorfas de ninguna dimensión.

Parece entonces claro que es necesario debilitar la definición de foliación holomorfa. Esta debilitación se manifestará en un doble sentido: permitiendo la anulación de las formas holomorfas por un lado, y considerando subhaces coherentes de TM y no sólo subfibrados, por otra.

Definición 1.4.5 *Sea M una variedad compleja de dimensión n. Una foliación holomorfa singular $\mathcal{F}$ de dimensión k, o codimensión $n-k$, $1 \leq k \leq n-1$, consiste en:*

- *Una colección de abiertos $\{U_\alpha\}$ que recubren M.*
- *Una colección de $(n-k)$-formas diferenciales holomorfas integrables no idénticamente nulas, $\{\omega_\alpha\}$, donde cada ω_α está definida en el correspondiente U_α.*
- *Una colección de funciones holomorfas nunca nulas, $\{\lambda_{\alpha\beta}\}$, donde $\lambda_{\alpha\beta}$ está definida en $U_\alpha \cap U_\beta$ y de manera que en este abierto $\omega_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\omega_\beta$.*

Como podemos observar, la definición es muy similar a la Definición 1.4.3. Al igual que en el caso no singular, dos de estas ternas de colecciones definen la misma foliación si para cada α es $\theta_\alpha = h_\alpha \omega_\alpha$ y existe una familia $\{f_\alpha\}$, con $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$, de manera que $\lambda_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}\mu_{\alpha\beta}$. La diferencia radica en que ahora las $(n-k)$-formas definiendo la foliación singular $\mathcal{F}$ pueden tener ceros, que serán llamados puntos singulares. Observemos asimismo que una foliación singular define una foliación sin singularidades en la variedad resultante de eliminar de M el conjunto de tales ceros.

Llamaremos, por tanto, conjunto singular a:

$$Z_{\mathcal{F}} = \{x \in M : \omega_\alpha(x) = 0 \text{ para algún } \alpha \text{ tal que } x \in U_\alpha\}$$

Se trata de un subconjunto algebraico de M de codimensión al menos 1.

Dada una foliación singular $\mathcal{F}$, siempre es posible encontrar una única foliación singular $\widetilde{\mathcal{F}}$ que coincide con $\mathcal{F}$ fuera del lugar singular pero tal que $cod(Z_{\widetilde{\mathcal{F}}}) \geq 2$. Si $Z_{\mathcal{F}}$ tiene codimensión 1, entonces

$$\omega_\alpha = f_\alpha \widetilde{\omega_\alpha}$$

con $f_\alpha \in \mathcal{O}_M(U_\alpha)$. Basta con tomar como k-formas a $\{\widetilde{\omega_\alpha}\}$.

De ahora en adelante, todas las foliaciones consideradas tendrán conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2.

Por otra parte, una foliación singular viene caracterizada por una sección de un determinado fibrado, tal y como sucedía en el caso no singular (ver definición 1.4.4). Es decir, una foliación singular puede venir dada por una sección holomorfa integrable no idénticamente nula del fibrado

$$\Omega_M^{n-k} \otimes \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{L}$ es un fibrado de línea en M que depende de la foliación. En particular, $\mathcal{L}$ es el fibrado cuyas transiciones son $\{g_{\alpha\beta}\}$. Dos de tales secciones definen la misma foliación si existe $f \in \mathcal{O}_M^*(M)$ de manera que una se obtiene de multiplicar la otra por f.

De ahora en adelante nos ocuparemos sólo de foliaciones holomorfas del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Vamos a dar una importante caracterización del concepto de foliación en términos de haces coherentes. Se utiliza frecuentemente en la literatura, pero no hemos encontrado una demostración explícita de este hecho. Previamente necesitamos algunas definiciones:

Definición 1.4.6 *Diremos que el par $(\mathcal{S}, \varphi)$ es un subhaz de TM si $\mathcal{S}$ es un haz coherente y $\varphi : \mathcal{S} \to TM$ es un morfismo inyectivo de haces. Además*

- *Dado un subhaz $(\mathcal{S},\varphi)$, definimos $Z(\mathcal{S},\varphi)=\{x\in M : (TM/\varphi(\mathcal{S}))_x$ no es $\mathcal{O}_{Mx}$-módulo libre$\}$*

- *$(\mathcal{S},\varphi)$ es integrable si dados dos gérmenes de $\mathcal{S}$, s_1 y s_2, en un punto $x\in M\setminus Z(\mathcal{S},\varphi)$ entonces*
$$[\varphi(s_1),\varphi(s_2)]=\varphi(r)$$
para cierto germen r de $\mathcal{S}$ en x.

- *$(\mathcal{S},\varphi)$ es full si dado un abierto $U\subseteq M$ y $\gamma\in TM(U)$ tal que $\gamma(x)\in\varphi(\mathcal{S})_x$ para cada $x\in U\cap(M\setminus Z(\mathcal{S},\varphi))$ entonces $\gamma(y)\in\varphi(\mathcal{S})_y$ para cada $y\in U\cap Z(\mathcal{S},\varphi)$.*

Observaciones:

1. *Si $x\in M\setminus Z(\mathcal{S},\varphi)$ entonces, en un entorno de x*
$$\varphi:\mathcal{S}\to TM$$
es un morfismo inyectivo de fibrados, es decir, que $\varphi(\mathcal{S})$ es un subfibrado de TM, y no sólo subhaz.

2. *Por otra parte, en la sección 3.2 se probará que si un subhaz $(\mathcal{S},\varphi)$ es full, entonces el haz $TM/\varphi(\mathcal{S})$ es libre de torsión. Según [OSS] esto implica que codim$(Z(\mathcal{S},\varphi))\geq 2$.*

Dada una foliación holomorfa de $\mathbb{P}^n$ representada por una sección holomorfa ω de $\Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}\otimes\mathcal{L}$, podemos interpretarla como un morfismo de fibrados
$$\widetilde{\omega}:T\mathbb{P}^n\to\Omega^{n-k-1}_{\mathbb{P}^n}\otimes\mathcal{L}$$
de modo que si $v\in T_x\mathbb{P}^n$, $\widetilde{\omega}_x(v)=\omega_x(v,-)$.

Así pues, definimos $\mathcal{E}_\omega=Ker(\widetilde{\omega})$, que será, según los comentarios tras la definición 1.1.10, un haz coherente de rango k. Así pues, $(\mathcal{E}_\omega,i)$ es un subhaz de $T\mathbb{P}^n$, y $Z(\mathcal{E}_\omega,i)=Z_{\mathcal{F}}$. Veámoslo.

Supongamos que $T\mathbb{P}^n_x/\mathcal{E}_{\omega x}$ es localmente libre. Entonces $\mathcal{E}_{\omega x}$ es localmente libre, y en un determinado entorno U de x podemos considerar $\{X_i\}$, $i=1,\dots,k$, campos de vectores generando $\mathcal{E}_\omega(U)$. Y además, $\{X_i(x)\}$ son linealmente independientes, pues podemos completar el sistema $\{X_i\}$ con una base de $T\mathbb{P}^n_x/\mathcal{E}_{\omega x}$ y obtener una base de TM.

Consideremos, pues, la $n-k$-forma holomorfa $\mu(X_1,\dots,X_k,-)$. En los puntos de $U\setminus Z_{\mathcal{F}}$ esta forma coincide con la inicial salvo un múltiplo no nulo (CORRECCIóN: Esto no es cierto, lo que sí es cierto es que hay una transformación lineal invertible que lleva la imagen de una en la otra. Al determinante de tal transformación sí se le puede aplicar Hartog para llegar al mismo resultado). La dependencia de este múltiplo es holomorfa, pues las formas lo son, y según el teorema de Hartog (ver [GU, p. 48]) se puede extender a todo U mediante una función nunca nula. Así pues, $x\notin Z_{\mathcal{F}}$.

Recíprocamente, supongamos $x\notin Z_{\mathcal{F}}$. Entonces, para cierto α
$$\omega_\alpha(x)\neq 0$$

Como ω_α es integrable, es localmente descomponible, luego en un entorno de x puede ser expresada como contracción de k vectores:

$$\mu(X_1, \dots, X_k, -) = \omega_\alpha$$

Supongamos que en el entorno tomado $T\mathbb{P}^n$ es trivial. Entonces tenemos una matriz con las coordenadas de X_i puestas en columnas:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_k^1 \\ x_1^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_k^n \end{pmatrix}$$

con al menos un menor $k \times k$ no nulo. Si completamos esta matriz $n \times k$ con $n-k$ vectores canónicos hasta obtener una matriz $n \times n$ invertible obtendremos una base de $T\mathbb{P}^n$. En particular, la clase de los vectores añadidos forman una base del cociente $(T\mathbb{P}^n/\mathcal{E}_\omega)_x$, que por tanto es libre.

Así pues, $Z(\mathcal{E}_\omega, i) = Z_{\mathcal{F}}$.

A continuación vamos a comprobar que $(\mathcal{E}_\omega, i)$ es integrable. Pensemos en un punto $x \in \mathbb{P}^n \setminus Z(\mathcal{E}_\omega, i) \subseteq M \setminus Z_{\mathcal{F}}$. En un entorno de x, la forma correspondiente es integrable y no nula, luego está definiendo una distribución integrable según [12, prop. 1.2.2.]. Así que $(\mathcal{E}_\omega, i)$ es integrable.

Por otra parte, $(\mathcal{E}_\omega, i)$ es full, pues si $\gamma \in T\mathbb{P}^n(U)$ para cierto abierto $U \subseteq M$ tal que $\gamma(x) \in \mathcal{E}_{\omega x}$ para $x \notin Z(\mathcal{E}_\omega, i)$, entonces para cierta ω_α representando la foliación en U será $\omega_\alpha(\gamma(x)) = 0$. Como $Z(\mathcal{E}_\omega, i)$ es un cerrado (por ser coherente es de codimensión al menos uno) $\omega_\alpha(\gamma(x)) = 0$ para todo $x \in U$.

Por lo tanto, una foliación $\mathcal{F}$ induce el subhaz integrable y full $(\mathcal{E}_\omega, i)$. Si analizamos la construcción de este subhaz, vemos que es independiente de ω, luego podemos denotarlo simplemente $T\mathcal{F}$, y lo llamaremos haz tangente a la foliación.

Recíprocamente, dado $(\mathcal{E}, \varphi)$ un subhaz de $T\mathbb{P}^n$ integrable, full y de rango k, vamos a ver de qué manera induce una foliación en $\mathbb{P}^n$. En $\mathbb{P}^n \setminus Z(\mathcal{E}, \varphi)$ este subhaz es subfibrado de $T\mathbb{P}^n$ integrable de rango k, y por tanto existe un fibrado de línea $\mathcal{L}$ y una sección ω de

$$\Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathbb{P}^n \setminus Z_{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{L}$$

integrable y nunca nula, describiendo la foliación holomorfa sin singularidades que define dicho subfibrado.

El fibrado de línea $\mathcal{L}$ puede ser extendido a todo $\mathbb{P}^n$ (ver [HA, p.133]). Lo seguiremos denotando por $\mathcal{L}$.

Así pues,

$$\omega \in (\Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{L})(\mathbb{P}^n \setminus Z(\mathcal{E}, \varphi))$$

Por ser $(\mathcal{E}, \varphi)$ full, $Z(\mathcal{E}, \varphi)$ es un conjunto analítico de codimensión mayor o igual que dos, luego por aplicación del teorema de Hartog deducimos que ω se extiende de manera única como sección global. Por lo tanto, define una foliación que denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{E},\varphi)$.

Observemos que al ser $(\mathcal{E},\varphi)$ full, cualquier subhaz full que coincida con él fuera de $Z(\mathcal{E},\varphi)$ es el mismo. Así pues, si construimos el haz $T\mathcal{F}(\mathcal{E},\varphi)$ mediante el proceso que acabamos de describir obtendremos el haz de partida.

Por otra parte, si partimos de una foliación $\mathcal{F}$ representada por una 1-forma "twistada" ω y construimos $T\mathcal{F}$, la forma que obtenemos de él coincide con un múltiplo no nulo de la de partida salvo en un conjunto de codimensión mayor o igual que dos. El múltiplo será una función holomorfa que se puede extender, y por tanto es constante. Así pues, ambas formas definen la misma foliación.

Por todo lo anterior, podemos dar una definición alternativa para el concepto de foliación.

Definición 1.4.7 *Una foliación holomorfa singular en $\mathbb{P}^n$ de dimensión k es un subhaz de $T\mathbb{P}^n$ de rango k, integrable y full.*

Como hemos visto, $Z(\mathcal{F}) = Z(T\mathcal{F}, i)$. Así pues, un punto $x \in \mathbb{P}^n$ puede ser singular por dos motivos:

- Si $T\mathcal{F}_x$ no es localmente libre.
- Si $T\mathcal{F}_x$ es libre pero la inclusión de haces $i : T\mathcal{F} \to T\mathbb{P}^n$ no es morfismo inyectivo de fibrados en x, y por tanto $T\mathbb{P}^n/T\mathcal{F}$ no es libre. En este caso, en un determinado entorno de x, $T\mathcal{F}$ y $T\mathbb{P}^n$ son fibrados, y podemos expresar i como una matriz de funciones holomorfas $n \times k$. Los puntos singulares son aquéllos donde esta matriz no tiene rango máximo.

Se sabe que en $\mathbb{P}^n$ cualquier fibrado de línea $\mathcal{L}$ es isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Así pues, una foliación viene representada por una sección ω del fibrado

$$\Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}(m)$$

Además, dos de estas secciones representan la misma foliación cuando una se obtiene de la otra multiplicando por una función holomorfa nunca nula. Pero al tratarse $\mathbb{P}^n$ de una variedad compacta, esta función es un escalar de $\mathbb{C}$. Así pues, fijado un entero m, todas las foliaciones con fibrado de línea $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)$ son los elementos de

$$\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}(m))$$

que cumplen la integrabilidad.

Ahora pensemos en la sucesión exacta de Euler en la forma de la ecuación (1.1) (ver sección 1.3.2). Tomando $p = n - k$ y tensorizando por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-n+k)$ obtenemos:

$$0 \longrightarrow \Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}(m) \longrightarrow \bigoplus_{\binom{n+1}{n-k}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-n+k) \longrightarrow \Omega^{n-k-1}_{\mathbb{P}^n}(m) \longrightarrow 0$$

y teniendo en cuenta la sucesión de cohomología asociada obtenemos:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}(m)) \longrightarrow \bigoplus_{\binom{n+1}{n-k}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-n+k)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^{n-k-1}_{\mathbb{P}^n}(m)) \longrightarrow \cdots$$

Dada entonces una foliación mediante una sección

$$\omega \in H^0(\mathbb{P}^n, \Omega^{n-k}_{\mathbb{P}^n}(m))$$

podemos considerar su imagen en

$$\bigoplus_{\binom{n+1}{n-k}} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-n+k))$$

que puede ser identificada con una $n-k$-forma en $\mathbb{C}^{n+1}$ que tenga por coeficientes polinomios homogéneos de grado $m+n-k$. Además, esta forma es integrable, como es fácil comprobar. La llamaremos representación global de la foliación.

La segunda aplicación de la sucesión exacta anterior se puede identificar con la contracción con el campo de vectores radial. Así pues, una $(n-k)$-forma en $\mathbb{C}^{n+1}$ que tenga por coeficientes polinomios homogéneos de grado $m+n-k$ define una foliación si y sólo si es integrable y la contracción con el radial es 0 (a esto último se le suele llamar condición de Euler). Además, si dos de tales formas representan la misma foliación, una es múltiplo de la otra mediante una constante no nula.

Observación:

Sea $\mathcal{F}$ una foliación representada globalmente por Ω. Sea $q \in \mathbb{P}^n$. Para $v \in T_q\mathbb{P}^n$ se tiene que $v \in T_q\mathcal{F}$ si y sólo si $\Omega_x(V) = 0$ para cada $x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $V \in T_x\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $\pi(x) = q$ y $d\pi_x(V) = v$.

Se define el grado de la foliación como el entero $m-n+k-1$. Tiene el siguiente significado geométrico: un $n-k$-plano de $\mathbb{P}^n$ genérico, H, corta transversalmente a las hojas de la foliación salvo en una hipersuperficie de H definida por la anulación de la forma $i^*\omega$, con $i: H \to \mathbb{P}^n$ la inclusión. El grado de esa hipersuperficie es el grado de la foliación.

Así pues, fijado la dimensión k y el grado d, todas las posibles foliaciones holomorfas de $\mathbb{P}^n$ son puntos de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^{N(k,d)}$. Veámoslo:

Una tal foliación estará representada por una forma homogénea con $\binom{n+1}{n-k}$ coeficientes, cada uno de los cuales, al ser un polinomio homogéneo de grado $d+1$, viene determinado por $\binom{n+d+1}{n}$ escalares. Por lo tanto, la foliación queda caracterizada por

$$N(k,d) = \binom{n+1}{n-k}\binom{n+d+1}{n}$$

escalares, salvo un múltiplo escalar.

Ahora bien, no todo punto de $\mathbb{P}^{N(k,d)}$ determina una foliación de dimensión k y grado d. Es necesario exigirle integrabilidad y la condición de Euler, que se traducen en que los escalares verifiquen ciertos polinomios homogéneos. Por tanto, podemos afirmar que las foliaciones de $\mathbb{P}^n$ de dimensión k y grado d constituyen un subconjunto algebraico de $\mathbb{P}^{N(k,d)}$.

Otro punto de vista para estudiar las foliaciones singulares en $\mathbb{P}^n$ consiste en estudiar su restricción a un abierto afín $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$. Según [LNS, p. 64], las foliaciones de dimensión 1 en $\mathbb{P}^n$ son precisamente las de $\mathbb{C}^n$ con coeficientes polinomiales. Es decir, dada una foliación en $\mathbb{C}^n$ con coeficientes polinomiales, puede ser extendida de manera única a una foliación de $\mathbb{P}^n$ y viceversa. Esto puede ser hecho sin demasiada dificultad en el caso general.

Capítulo 2

El haz tangente y la clasificación de foliaciones.

En este capítulo pondremos al lector en el contexto en el que surge el problema abierto que pretende resolver el presente trabajo.

2.1. La clasificación de las foliaciones holomorfas de codimensión 1 en $\mathbb{P}^n$

Como acabamos de ver, para estudiar las foliaciones de una determinada dimensión en $\mathbb{P}^n$ es especialmente útil fijar el grado. Una vez fijo, obtenemos un subconjunto algebraico de un determinado espacio proyectivo, que puede tener una o varias componentes irreducibles. El problema de la clasificación de las foliaciones en $\mathbb{P}^n$ consiste en enumerar y describir estas componentes.

Este problema está lejos de ser resuelto en general. Para su resolución se utilizan técnicas de geometría diferencial compleja y geometría algebraica.

En dimensión 1 se sabe que el espacio de foliaciones de grado k posee una estructura natural de espacio proyectivo (ver [LNS, p.70]). En cambio, para el caso de codimensión 1 y $n \geq 3$ queda mucho por conocer (para $n = 2$ las foliaciones de dimensión 1 y codimensión 1 coinciden). En las dimensiones intermedias la situación es completamente desalentadora, aunque van apareciendo algunos resultados en esta línea (ver [8]).

En nuestro trabajo nos centraremos en el caso de codimensión 1. De ahora en adelante, y mientras no se diga lo contrario, la palabra "foliación" designará a una foliación singular holomorfa de codimensión 1. El espacio de foliaciones de $\mathbb{P}^n$ de grado k será denotado por $\mathcal{F}(k, n)$, del cual se conocen los siguientes hechos:

- Las foliaciones de grado 0 en $\mathbb{P}^n$ tienen integral primera meromorfa de la forma f/g, donde
$$f, g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$$
son polinomios homogéneos de grado 1.

En este caso una forma homogénea asociada a la foliación es $fdg - gdf$. Como consecuencia, toda foliación de grado 0 puede ser obtenida de otra mediante un automorfismo de $\mathbb{P}^n$, luego $\mathcal{F}(0,n)$ tiene una única componente irreducible.

- Una foliación de grado 1 en $\mathbb{P}^n$ viene representada por una 1-forma ω en $\mathbb{C}^{n+1}$ que tenga un factor integrante: existe una función meromorfa φ de manera que ω/φ es cerrada. En [JO] se demuestra que la forma puede ser de tres tipos:

  1. $$f_1 f_2 f_3 \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$
     donde f_1, f_2 y f_3 son polinomios homogéneos de grado 1 y $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
  2. $$f_2^2 df_1 - f_1(f_2 + f_3)df_2 + f_1 f_2 df_3$$
     donde nuevamente f_1, f_2 y f_3 son polinomios homogéneos de grado 1.
  3. $$f_2 df_1 - 2f_1 df_2$$
     donde f_1 es polinomio homogéneo de grado 2 y f_2 de grado 1.

  El caso 2 puede ser considerado como límite de 1. Por lo tanto, el espacio $\mathcal{F}(1,n)$ tiene dos componentes irreducibles.

- En [6] se demuestra el siguiente teorema:

  Teorema. *El espacio de foliaciones de codimensión 1 y grado 2 en $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, tiene 6 componentes irreducibles.*

  y se detalla la manera de construir cada una de ellas.

- Para grado mayor se conocen algunas familias de componentes, principalmente generalizaciones de las anteriores:

  1. Componentes racionales (ver [10]).
  2. Componentes logarítmicas (ver [3]).
  3. Componente de "pull-back" lineales (ver [5]).
  4. Componentes de "pull-back" genéricos (ver [7]).
  5. Componente asociada al álgebra de Lie afín (ver [4]).

En general, el proceso para encontrar una familia irreducible consiste en describir una determinada familia de foliaciones con una característica especial y a continuación probar que constituyen una componente irreducible mediante técnicas de deformación: se hacen variaciones paramétricas holomorfas de los coeficientes que definen un elemento genérico de la familia y se trata de demostrar que si tomamos el parámetro en un determinado entorno de 0, la foliación correspondiente sigue perteneciendo a la familia. A esta propiedad se le suele llamar *estabilidad* de la familia. Si además de pertenecer a la familia, la foliación deformada puede obtenerse de la original mediante un automorfismo de $\mathbb{P}^n$, se dice que la familia es *rígida*.

2.2. La componente excepcional y su generalización.

En el trabajo de D. Cerveau y A. Lins Neto ([6]) se construye una componente irreducible en grado 2 que llaman componente excepcional. Se parte de la curva $\Gamma \subset \mathbb{C}^3$ parametrizada por

$$t \longrightarrow \left(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6}\right)$$

El subgrupo del grupo de transformaciones afines de $\mathbb{C}^3$ formado por aquéllas transformaciones que dejan Γ invariante es isomorfo al grupo afín de $\mathbb{C}$

$$\text{Aff}(\mathbb{C}) = \{az + b : \quad a \neq 0\}$$

Este subgrupo se corresponde con una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de campos de vectores holomorfos de $\mathbb{C}^3$, concretamente con aquélla descrita por los campos

$$\begin{cases} X &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + 3z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \\ Y &= \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_3} \end{cases}$$

pues $[X, Y] = Y$

Cualquier subálgebra del álgebra de Lie de campos de vectores induce un subhaz de TM de manera trivial, luego tenemos una foliación singular en $\mathbb{C}^3$ con lugar singular Γ y definida por la 1-forma integrable

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma &= i_Y i_X (dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3) \\ &= (2z_2^2 - 3z_1 z_3)dz_1 + (3z_3 - z_1 z_2)dz_2 + (z_1^2 - 2z_2)dz_3 \end{aligned}$$

Esta foliación, que llamaremos $\mathcal{F}_\Gamma$, se extiende a una foliación de $\mathbb{P}^3$, pues tiene coeficientes polinomiales, y se representa por la 1-forma homogénea en $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} \Omega_\Gamma = \; & z4(2z_2^2 - z_1 z_3)dz_1 + z_4(3z_3 z_4 - z_1 z_2)dz_2 + z_4(z_1^2 - 2z_2 z_4)dz_3 \\ & -(z_1 z_2^2 - 2z_1^2 z_3 + z_2 z_3 z_4)dz_4 \end{aligned}$$

Observemos que el grado de Ω es 3, y por tanto el grado de la foliación es 2.

Se define $E(n) \subset \mathcal{F}(2, n)$ como

$$E(n) = \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(2, n) : \mathcal{F} = \varphi^*(\mathcal{F}_\Gamma), \text{ donde } \varphi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^3 \text{ es proyección lineal}\}$$

y se prueba que su clausura es componente irreducible.

La clave en la demostración de que la familia anterior es componente irreducible es el lugar singular de la foliación. En el caso $n = 3$, los vectores X e Y son ambos tangentes a la cúbica de partida, al ser ésta invariante por el grupo de transformaciones que induce la subálgebra $\langle X, Y \rangle$. Luego Γ está contenida en el lugar singular. Se comprueba fácilmente que en el hiperplano del infinito hay dos componentes irreducibles más del lugar singular: una recta y una cuádrica; y las tres se cortan en un punto. Esta configuración resulta ser muy estable, y cualquier foliación "cercana" a $\mathcal{F}_\Gamma$ tiene el mismo lugar singular salvo un cambio de coordenadas lineal. Por otra parte se prueba que dos foliaciones con ése lugar singular y tal que las 1-formas que las definen no sean cerradas y de grado mayor que 2 deben ser la misma. Así pues, $\overline{E(3)}$ es componente irreducible. Para $n \geq 4$ se reduce al caso anterior.

En [4] se intenta encontrar una generalización de esta componente en grado superior. Para ello se consideran las curvas de Klein-Lie. Estas curvas son racionales, y en $\mathbb{P}^3$ están parametrizadas salvo automorfismo en $\mathbb{P}GL(4,\mathbb{C})$ por

$$\begin{array}{cccc} \Gamma: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & [t:s] & \longrightarrow & [t^p : t^q s^{p-q} : t^r s^{p-r} : s^p] \end{array}$$

donde $1 \leq r < q < p$ son enteros positivos con mcd(p,q,r) = 1.

Siguiendo las ideas de [6], supongamos que mediante Γ se encuentran representaciones del álgebra de Lie Aff($\mathbb{C}$) en $T\mathbb{C}^3(\mathbb{C}^3)$ mediante campos polinomiales S y X, donde

$$S = pz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + qz_2\frac{\partial}{\partial z_2} + rz_3\frac{\partial}{\partial z_3}$$

y X es tal que $[S,X] = lX$, para un cierto entero $l \neq 0$.

En tal caso, se obtiene una foliación en $\mathbb{C}^3$ cuyo lugar singular es la restricción a $\mathbb{C}^3$ de dicha curva y que se denota por $\mathcal{F}(S,X)$.

Se definen familias de foliaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p,q,r,l,d) &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d,3) : \mathcal{F}|_U = \mathcal{F}(S,X) \text{ para } U = \mathbb{P}^3 \setminus H \text{ con } H \text{ un hiperplano}\} \\ &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{F}(d,3) : \mathcal{F} = \varphi^*(\mathcal{F}(S,X)), \text{ donde } \varphi : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3 \text{ automorfismo}\} \end{aligned}$$

de manera análoga al caso anterior.

En esta situación, todavía no se está en disposición de afirmar que la familia definida sea estable. La hipótesis adicional suficiente para ello es que la familia contenga una foliación con una propiedad especialmente buena: que sea GK.

En el artículo en cuestión se hacen las siguientes definiciones:

- Sea ω una 1-forma integrable definida en un entorno de $p \in \mathbb{C}^3$. Decimos que p es una singularidad de tipo Kupka generalizada (GK) si $\omega(p) = 0$ y, o bien $d\omega(p) \neq 0$, o bien p es singularidad aislada de $d\omega$.

- Una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^3$ es GK si todas sus singularidades son GK.

Las foliaciones GK son estables, en el siguiente sentido: *Sea $\mathcal{F}_0$ una foliación de codimensión 1 y GK en $\mathbb{P}^3$. Entonces existe un entorno $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}_0$ en el espacio de foliaciones de manera que cualquier $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ es GK.* Además, tienen la importante propiedad de que su haz tangente es localmente libre.

Se demuestra que si $\mathcal{F}(p,q,r,l,d)$ contiene una foliación GK, entonces es componente irreducible. En la demostración se utilizan tanto el hecho de que la foliación sea GK (para que en un entorno todas las foliaciones tengan haz tangente localmente libre) como que el haz sea escindido (para que en ese entorno los haces sean todos escindidos y por tanto todas estén generadas por dos foliaciones por curvas y poder asegurar así la pertenencia a $\mathcal{F}(p,q,r,l,d)$).

También se definen familias de foliaciones en dimensión superior, mediante pull-backs de las anteriores, y se prueba que constituyen nuevas componentes irreducibles.

En ambas demostraciones hay una idea fundamental para la estabilidad: el haz tangente es un fibrado descomponible.

2.3. El problema.

En [4], además de los resultados expuestos en la sección anterior, se introducen varios ejemplos de foliaciones pertenecientes a las familias presentadas. El estudio de las propiedades de las foliaciones expuestas lleva a los autores a plantear tres problemas:

1. Dados tres enteros positivos $p > q > r \geq 1$, ¿existen (l, d) tales que $\mathcal{F}(p, q, r, l, d)$ contenga una foliación GK?

2. Dada una foliación GK en $\mathbb{P}^3$ su haz tangente es un fibrado vectorial, ¿es siempre escindido? Más en general, si el haz tangente de una foliación es localmente libre, ¿es necesariamente escindido?

3. ¿Existen foliaciones en $\mathbb{P}^3$ que sean GK con más de 2 singularidades quasi-homogéneas?

En el presente texto nos ocupamos del problema 2. En general, todos los esfuerzos han ido dirigidos a intentar clarificar la relación existente entre estos tres tipos de foliaciones: las localmente libres, las escindidas y las GK.

La motivación del problema es clara: actualmente todos los ejemplos conocidos de foliaciones con haz tangente localmente libre son escindidas. A la hora de clasificar foliaciones es muy interesante saber si se pueden simplificar estas dos "clases", sobre todo porque hay cierta vinculación entre las propiedades del haz tangente y las de la foliación. Por ejemplo, que el haz tangente sea escindido conlleva, como veremos, que la foliación esté generada por dos subfoliaciones por curvas, lo cual supone una simplificación en el estudio de tales foliaciones.

Por otra parte, la existencia de una foliación con haz tangente localmente libre pero no escindido puede abrir algún camino hacia la búsqueda de una nueva componente irreducible.

En el contexto general de la geometría algebraica hay ejemplos de fibrados de rango 2 en $\mathbb{P}^3$ que no son escindidos. En nuestro contexto tenemos dos hipótesis sobre el fibrado de rango 2: es subhaz de $T\mathbb{P}^3$ y es integrable. El hecho de que todas las foliaciones localmente libres sean escindidas podría indicar que hay una "traducción algebraica" para una hipótesis diferencial como es la integrabilidad. En ese sentido sería también interesante conocer si existen fibrados que, siendo subhaces de $T\mathbb{P}^3$, no son escindidos.

Por otra parte, resolver la "versión débil" del problema, es decir, que ser GK implica que el haz tangente escinde, supondría una simplificación argumental para los trabajos [4] y [8]. Además, toda foliación GK estaría asociada a una representación de un álgebra de Lie, lo cual dotaría de significado geométrico a esta hipótesis.

Capítulo 3

Líneas de investigación y resultados

3.1. Memoria

En primer lugar, tras un periodo de formación general en geometría algebraica, basada principalmente en lecturas de [GH], [FU], [HA] y [EI], y otro de formación más específica en foliaciones holomorfas, mediante lecturas de [LNS] y [BR], se comenzó a estudiar artículos cercanos al problema ([2], [9], [6], [4], [8], [15], [12], [5], etcétera).

En todo momento se ha compaginado la lectura de artículos relevantes de cara al problema con el estudio de ejemplos concretos. El estudio de tales ejemplos ha desempeñado un papel doble: ha servido para clarificar las ideas teóricas que han ido apareciendo, y para realizar una primera taxonomía de la situación.

A continuación vamos a describir algunos de tales ejemplos:

Ejemplo 1 . Este ejemplo se encuentra en [8]. Consideremos la función holomorfa

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & x^2+y^2+z^2 \end{array}$$

Se tiene que la 1-forma

$$df = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

induce una foliación en $\mathbb{C}^3$ y por tanto, al ser polinomial, en $\mathbb{P}^3$. La denotaremos por $\mathcal{F}$.

Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $x_0 \neq 0$. En tal caso, podemos tomar entorno de p, U,que no corte a $\{(0, y, z) \in \mathbb{C}^3\}$. Tenemos un isomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(U)$-módulos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(U) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(U) & \longrightarrow & T\mathcal{F}(U) \\ (\lambda, \mu) & \longrightarrow & \lambda(-y, x, 0) + \mu(-z, 0, x) \end{array}$$

Así pues, para $p \neq 0$ el haz tangente es localmente libre.

Sin embargo, observemos que $T\mathcal{F}$ no es localmente libre en $0 \in \mathbb{C}^3$. Para ello tengamos en cuenta que si $T\mathcal{F}(U)$ fuese libre, siendo U un entorno de 0, entonces existirían 2 campos de vectores en U, X_1 y X_2, de manera que $Z(\mathcal{F})\cap U$ lo constituyen los puntos de U en los que ambos vectores son dependientes. Por tanto, si U es tal que $T\mathbb{P}^3$ es trivial, el lugar singular en U viene determinado por la anulación de los menores de una matriz 3×2:

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}$$

formada por las coordenadas de los vectores X_1 y X_2.

Pero cuando dos menores de una matriz 3×2 se anulan también lo hace el tercero. Luego el lugar singular tiene codimensión mayor o igual a 2 (y por tanto 2). Pero 0 es una singularidad aislada de df, luego el haz no puede ser localmente libre en 0.

Ejemplo 2 Consideramos ahora en $\mathbb{C}^3$ la 1-forma

$$\omega = dx$$

Define una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^3$. Si consideramos

- en U_0 coordenadas (x, y, z).
- en U_1 coordenadas (a, b, c).
- en U_2 coordenadas (u, v, w).
- en U_3 coordenadas (m, n, p).
- en $\mathbb{P}^3$ coordenadas homogéneas $[Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3]$.

tenemos que la foliación viene dada por

- La colección de abiertos $\{U_0, U_1, U_2, U_3\}$.
- La colección de 1-formas $\{dx, da, -vdu+udv, -ndm+mdn\}$, cada una en su dominio correspondiente.
- El cociclo $\{\left(\frac{Z_i}{Z_j}\right)^2\}$.

Luego el fibrado de línea de $\mathcal{F}$ es $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$, y el grado es 0. Está representada globalmente por

$$\Omega = Z_0 dZ_1 - Z_1 dZ_0$$

Esta foliación, que tiene por lugar singular la recta de ideal $(Z0, Z1)$, tiene haz tangente localmente libre y escindido. Veámoslo:

Consideremos en U_0 los campos de vectores $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$ y $X_2 = \frac{\partial}{\partial z}$ que inducen foliaciones por curvas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ en $\mathbb{P}^3$. Si denotamos por μ al determinante en $\mathbb{C}^3$ se tiene que

$$i_{\frac{\partial}{\partial y}} i_{\frac{\partial}{\partial z}} \mu = dx$$

En el abierto U_1 tenemos que $\mathcal{F}$ viene representada por da, $\mathcal{G}_1$ está representada por $\frac{\partial}{\partial b}$, y $\mathcal{G}_2$ lo está por $\frac{\partial}{\partial c}$. Y nuevamente

$$i_{\frac{\partial}{\partial b}} i_{\frac{\partial}{\partial c}} \mu = da$$

Se deja para el lector que compruebe que en el resto de abiertos afines tenemos la misma situación: las dos foliaciones por curvas nos están determinando la foliación $\mathcal{F}$. Más adelante se demuestra que por ello la foliación $\mathcal{F}$ es escindida.

También se verá que otra forma, mucho más "compacta", de comprobar que la foliación es escindida es la existencia de los campos homogéneos en $\mathbb{C}^4$ $\frac{\partial}{\partial Z_2}$ y $\frac{\partial}{\partial Z_3}$, de manera que

$$\Omega = i_{\frac{\partial}{\partial Z_2}} i_{\frac{\partial}{\partial Z_3}} i_R \mu$$

donde en este caso μ es el determinante en $\mathbb{C}^4$.

Ejemplo 3 En la sección 2.2 se introduce una foliación $\mathcal{F}_\Gamma$ en $\mathbb{P}^3$ que da lugar a la construcción de la componente excepcional, tal y como se detalla en [6]. Vamos a comprobar que se trata de una foliación con haz localmente libre y escindido. Para ello, basta con observar que tenemos dos campos de vectores homogéneos en $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} X = &\quad Z_0\frac{\partial}{\partial Z_0} + 2Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + 3Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2} + 4Z_3\frac{\partial}{\partial Z_3} \\ Y = &\quad Z_0\frac{\partial}{\partial Z_0} + (Z_0+Z_1)\frac{\partial}{\partial Z_1} + (Z_1+Z_2)\frac{\partial}{\partial Z_2} + (Z_2+Z_3)\frac{\partial}{\partial Z_3} \end{aligned}$$

de manera que

$$\Omega_\Gamma = i_X i_Y i_R \mu$$

Ejemplo 4 Una cuestión que ha aparecido varias veces a lo largo de la investigación ha sido el determinar cuándo una 1-forma con coeficientes polinomiales puede ser expresada como contracción de dos campos de vectores. En caso afirmativo, es interesante saber si estos campos son polinomiales o pueden ser combinados para encontrar campos polinomiales generando la forma.

En esta línea se han encontrado varios ejemplos. Entre ellos tenemos la 1-forma integrable

$$\omega = (2y^2 - 3xz)dx + (3z - xy)dy + (x^2 - 2y)dz$$

que puede ser expresada mediante la contracción de los vectores no polinomiales

$$\begin{aligned} X = &\quad (x+e^x)\frac{\partial}{\partial x} + (2y+xe^x)\frac{\partial}{\partial y} + (3z+ye^x)\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = &\quad \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

No obstante, observemos que se puede encontrar una combinación holomorfa de estos campos

$$X' = X - e^x Y = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}$$

de manera que X' e Y también producen ω, pero son polinomiales.

Ejemplo 5 Otra pregunta que ha surgido en la investigación es la siguiente: supongamos dos campos de vectores polinomiales en $\mathbb{C}^3$ de manera que son linealmente dependientes en un conjunto de codimensión 2 (curva). Al ser polinomiales puede ser extendidos a $\mathbb{P}^3$ como campos de vectores "twistados". ¿Tendrán dependencia sólo en codimensión 2?

La respuesta afirmativa reduciría el problema al estudio de la 1-forma en un abierto afín. Pero el siguiente ejemplo prueba que esto no es así.

Consideremos los campos

$$\begin{aligned} X = &\quad 3x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \\ Y = &\quad 3yz\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Son linealmente dependientes en el conjunto algebraico definido por

$$\begin{gathered} y - z \\ 3x - 3yz^2 \\ 3x - 3y^2 z \end{gathered}$$

Ahora bien, si vemos estos campos en el afín U_1

$$\begin{aligned} X' = &\quad -3a\frac{\partial}{\partial a} + -2b\frac{\partial}{\partial b} + -2c\frac{\partial}{\partial c} \\ Y' = &\quad -3abc\frac{\partial}{\partial a} + -3b^2c\frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial c} \end{aligned}$$

el lugar de dependencia viene descrito por la anulación de los polinomios

$$\begin{gathered} 2a^2(-b+c) \\ 3a(a^2 - bc^2) \\ -3a(a^2 - 3b^2c) \end{gathered}$$

y claramente tiene codimensión 1.

Adicionalmente observemos que los campos de partida definen una foliación, es decir, que su contracción con la forma de volumen produce una 1-forma integrable.

Para trabajar ágilmente con los ejemplos ha sido oportuno crear un pequeño "programa" con el software MATHEMATICA 5.1. El texto del archivo es el siguiente:

- *Expresión de un campo de vectores en coordenadas distintas a las dadas, de U_0 a U_1.*

```
X = {p*w1, q*w2, r*w3}; F[w1_, w2_, w3_] = {1/w1, w2/w1, w3/w1};

M = Transpose[{Simplify[D[F[w1,w2, w3], w1]], Simplify[D[F[w1, w2, w3], w2]],
Simplify[D[F[w1,
w2,w3], w3]]}];
```

```
sol = Solve[{F[w1, w2, w3][[1]] == a1, F[w1, w2, w3][[2]] == a2,
F[w1, w2, w3][[3]] == a3}, {w1,
w2, w3}];

Xp = Flatten[Simplify[M . X /. sol]]
```

- *Dada una 1-forma en U_0, encontrar su expresión en U_1.*

```
w = {2*w1, w2, 0};

aux = w /. {w1 -> 1/a1, w2 -> a2/a1, w3 -> a3/a1};

aux2 =aux[[1]]*((-(a1^2)^(-1))*da1) + aux[[2]]*((da2*a1 - a2*da1)/a1^2) +
    aux[[3]]*((da3*a1 - a3*da1)/a1^2);

wp = Simplify[{Coefficient[aux2, da1], Coefficient[aux2, da2],
    Coefficient[aux2, da3]}]
```

- *Cálculo de la 1-forma global de una foliación a partir de la 1-forma en U_0.*

```
w = {w1, w2, 0};

aux = w /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0, w3 -> Z3/Z0};

aux2 = aux[[1]]*((dZ1*Z0 - Z1*dZ0)/Z0^2) +
    aux[[2]]*((dZ2*Z0 - Z2*dZ0)/Z0^2) + aux[[3]]*((dZ3*Z0 - Z3*dZ0)/Z0^2);

W = Simplify[{Coefficient[aux2, dZ0], Coefficient[aux2, dZ1],
    Coefficient[aux2, dZ2], Coefficient[aux2, dZ3]}]
```

- *Dado un campo de vectores en U_0 encontrar un campo homogéneo en $\mathbb{C}^4$ que se "proyecte" al dado.*

```
x = {-5, -5*w1, -5*w2};

S = Solve[{A1/Z0 - A0*(Z1/Z0^2) == x[[1]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}, A2/Z0 - A0*(Z2/Z0^2) == x[[2]] /.
      {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0, w3 -> Z3/Z0},
     A3/Z0 - A0*(Z3/Z0^2) == x[[3]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}}, {A1, A2, A3}];

X = Simplify[S /. {A0 -> Z0}]
```

- *Calcular la derivada de una 1-forma y comprobar la integrabilidad.*

```
w = {-u2 - u1*u3 + 2*u2^2*u3, u1*(2 - 3*u2*u3), u1*(-2*u1 + u2^2)} /.
    {u1 -> w1, u2 -> w2, u3 -> w3};

dw = Simplify[{D[w[[3]], w2] - D[w[[2]], w3], D[w[[1]], w3] - D[w[[3]], w1],
    D[w[[2]], w1] - D[w[[1]], w2]}]

dwwedgew = Simplify[dw[[1]]*w[[1]] + dw[[2]]*w[[2]] + dw[[3]]*w[[3]]]
```

- *Calcular el corchete de Lie de dos campos en $\mathbb{C}^4$ y en $\mathbb{C}^3$.*

```
X = {Z0, Z1 + 1, Z2^3, Z3};

Y = {Z0*Z2, Z1^2 + Z3^2, Z1*Z2, Z3^2 + Z0^2};

CXY = Table[X[[1]]*D[Y[[i]], Z0] - Y[[1]]*D[X[[i]], Z0] +
    X[[2]]*D[Y[[i]], Z1] - Y[[2]]*D[X[[i]], Z1] + X[[3]]*D[Y[[i]], Z2] -
    Y[[3]]*D[X[[i]], Z2] + X[[4]]*D[Y[[i]], Z3] - Y[[4]]*D[X[[i]], Z3],
   {i, 4}]

x = {-p2[w1, w2, w3], p1[w1, w2, w3], 0};

y = {-p3[w1, w2, w3], 0, p1[w1, w2, w3]};

Cxy = Simplify[Table[x[[1]]*D[y[[i]], w1] - y[[1]]*D[x[[i]], w1] +
     x[[2]]*D[y[[i]], w2] - y[[2]]*D[x[[i]], w2] + x[[3]]*D[y[[i]], w3] -
     y[[3]]*D[x[[i]], w3], {i, 3}]]
```

- *A partir de dos campos de vectores polinomiales en $\mathbb{C}^3$ calcular la 1-forma que generan, comprobar su integrabilidad, calcular la 1-forma global homogénea y los vectores homogéneos que se proyectan sobre los dados, calcular la 1-forma que genera la contracción de estos vectores al contraer, cálculo del rotacional de la forma generada por los vectores de partida,etcétera.*

```
R = {Z0, Z1, Z2, Z3}; k1 = 0;

k2 = 0;

k = 4;

k3 = 0;
```

```
x0 = {w1, 2*w2, 3*w3};

y0 = {1, w1, w2};

b = Det[Transpose[{x0, y0, {dw1, dw2, dw3}}]];

W0 = Simplify[{Coefficient[b, dw1], Coefficient[b, dw2],
     Coefficient[b, dw3]}];

dW0 = {D[W0[[3]], w2] - D[W0[[2]], w3], D[W0[[1]], w3] - D[W0[[3]], w1],
    D[W0[[2]], w1] - D[W0[[1]], w2]};

dW0wedgeW0 = Simplify[dW0[[1]]*W0[[1]] + dW0[[2]]*W0[[2]] +
     dW0[[3]]*W0[[3]]];

aux = W0 /. {w1 -> 1/a1, w2 -> a2/a1, w3 -> a3/a1};

aux2 = aux[[1]]*((-(a1^2)^(-1))*da1) + aux[[2]]*((da2*a1 - a2*da1)/a1^2) +
    aux[[3]]*((da3*a1 - a3*da1)/a1^2);

W1 = a1^k*Simplify[{Coefficient[aux2, da1], Coefficient[aux2, da2],
      Coefficient[aux2, da3]}];

dW1 = {D[W1[[3]], a2] - D[W1[[2]], a3], D[W1[[1]], a3] - D[W1[[3]], a1],
    D[W1[[2]], a1] - D[W1[[1]], a2]};

dW1wedgeW1 = Simplify[dW1[[1]]*W1[[1]] + dW1[[2]]*W1[[2]] +
     dW1[[3]]*W1[[3]]];

rot0 = dW0; F[w1_, w2_, w3_] = {1/w1, w2/w1, w3/w1};

M = Transpose[{Simplify[D[F[w1, w2, w3], w1]],
     Simplify[D[F[w1, w2, w3], w2]], Simplify[D[F[w1, w2, w3], w3]]}];

sol = Solve[{F[w1, w2, w3][[1]] == a1, F[w1, w2, w3][[2]] == a2,
     F[w1, w2, w3][[3]] == a3}, {w1, w2, w3}];

x1 = Flatten[Simplify[a1^k1*M . x0 /. sol]];

y1 = Flatten[Simplify[a1^k2*M . y0 /. sol]];

rot1 = Flatten[Simplify[a1^k3*M . rot0 /. sol]];

b = Det[{x1, y1, {dw1, dw2, dw3}}];
```

```
W1p = Simplify[{Coefficient[b, dw1], Coefficient[b, dw2],
     Coefficient[b, dw3]}];

dW1p = {D[W1p[[3]], a2] - D[W1p[[2]], a3], D[W1p[[1]], a3] - D[W1p[[3]], a1],
    D[W1p[[2]], a1] - D[W1p[[1]], a2]};

dW1pwedgeW1p = Simplify[dW1p[[1]]*W1p[[1]] + dW1p[[2]]*W1p[[2]] +
     dW1p[[3]]*W1p[[3]]];

aux = W0 /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0, w3 -> Z3/Z0};

aux2 = aux[[1]]*((dZ1*Z0 - Z1*dZ0)/Z0^2) +
    aux[[2]]*((dZ2*Z0 - Z2*dZ0)/Z0^2) + aux[[3]]*((dZ3*Z0 - Z3*dZ0)/Z0^2);

W = Simplify[Z0^k*{Coefficient[aux2, dZ0], Coefficient[aux2, dZ1],
      Coefficient[aux2, dZ2], Coefficient[aux2, dZ3]}];

S = Solve[{A1/Z0 - A0*(Z1/Z0^2) == x0[[1]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}, A2/Z0 - A0*(Z2/Z0^2) == x0[[2]] /.
      {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0, w3 -> Z3/Z0},
     A3/Z0 - A0*(Z3/Z0^2) == x0[[3]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}}, {A1, A2, A3}];

A = S /. {A0 -> Z0}; A = Join[{A0 -> Z0}, Flatten[A]];

X = Simplify[Z0^k1*{A0, A1, A2, A3} /. A];

S = Solve[{A1/Z0 - A0*(Z1/Z0^2) == y0[[1]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}, A2/Z0 - A0*(Z2/Z0^2) == y0[[2]] /.
      {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0, w3 -> Z3/Z0},
     A3/Z0 - A0*(Z3/Z0^2) == y0[[3]] /. {w1 -> Z1/Z0, w2 -> Z2/Z0,
       w3 -> Z3/Z0}}, {A1, A2, A3}];

A = S /. {A0 -> Z0};

A = Join[{A0 -> Z0}, Flatten[A]];

Y = Simplify[Z0^k2*{A0, A1, A2, A3} /. A];

aux2 = Det[{X, Y, R, {dZ0, dZ1, dZ2, dZ3}}];

Wp = {Coefficient[aux2, dZ0], Coefficient[aux2, dZ1], Coefficient[aux2, dZ2],
    Coefficient[aux2, dZ3]};
```

```
x = x0;

y = y0;

Cxy0 = Simplify[Table[x[[1]]*D[y[[i]], w1] - y[[1]]*D[x[[i]], w1] +
      x[[2]]*D[y[[i]], w2] - y[[2]]*D[x[[i]], w2] + x[[3]]*D[y[[i]], w3] -
      y[[3]]*D[x[[i]], w3], {i, 3}]];

x = x1 /. {a1 -> w1, a2 -> w2, a3 -> w3};

y = y1 /. {a1 -> w1, a2 -> w2, a3 -> w3};

Cxy1 = Simplify[Table[x[[1]]*D[y[[i]], w1] - y[[1]]*D[x[[i]], w1] +
       x[[2]]*D[y[[i]], w2] - y[[2]]*D[x[[i]], w2] + x[[3]]*D[y[[i]], w3] -
       y[[3]]*D[x[[i]], w3], {i, 3}]] /. {w1 -> a1, w2 -> a2, w3 -> a3};

Print["Expresión global de la forma"] W

Print["Expresión global de los vectores"] X Y

Print["Contracción de estos campos"] Wp

Print["Forma en U_0"] W0

Print["Su rotacional"] dW0

Print["Comprobación de que es integrable"] dW0wedgeW0

Print["Expresiones de los campos en U_1"] x1 y1

Print["Expresión de la forma de partida en U_1"] Simplify[W1]

Print["y su rotacional"] dW1

Print["Expresión del rotacional de la forma de U_0 en U_1"] Simplify[Z1]

Print["Forma contraída con los nuevos campos de vectores"] W1p

Print["Corchetes de Lie, en U0 y en U1"] Cxy0 Cxy1
```

El primer intento de solución del problema pasó por encontrar en la literatura condiciones suficientes para que un fibrado de $\mathbb{P}^n$ sea escindido. En ese sentido el principal resultado conocido es el criterio de Horrocks, cuya demostración puede leerse en [OSS] y que dice:

Teorema (Horrocks). *Un fibrado vectorial holomorfo E de $\mathbb{P}^n$ es escindido si y sólo si*

$$H^i(\mathbb{P}^n, E(k)) = 0 \textit{ para } i = 1, \ldots, n-1 \textit{ y todo } k \in \mathbb{Z}$$

Junto a este teorema tenemos el artículo [11], en el cual se demuestra que un criterio suficiente para garantizar que un fibrado E escinde es la existencia de una determinada conexión en el fibrado pull-back $\widetilde{E}$ de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Esta condición se traduce cohomológicamente en:

$$H^1(\mathbb{P}^n, (E \otimes E^*)(k)) = 0 \text{ para } 1 \leq k \leq n-1$$

Una idea plausible es que la integrabilidad sea la clave para definir la conexión exigida en el artículo.

Otro acercamiento al problema estuvo inspirado en la ya mencionada construcción de la componente excepcional (ver sección 2.2 y ejemplo 3). La cadena lógica es:

1. Cualquier foliación en $\mathbb{P}^3$ con haz tangente localmente libre y full está definida en U_0 mediante la contracción de dos campos de vectores, x e y con una forma de volumen μ

$$i_x i_y \mu$$

2. Se pueden tomar los campos x e y con coeficientes polinomiales, que por tanto pueden ser extendidos hasta definir dos foliaciones por curvas en $\mathbb{P}^3$. Tomamos dos campos de vectores homogéneos X e Y en $\mathbb{C}^4$ que se proyecten sobre ellos.

3. La 1-forma homogénea definida en $\mathbb{C}^4$ por

$$i_X i_Y i_R \Lambda$$

donde

$$R = Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} + Z_1 \frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2 \frac{\partial}{\partial Z_2} + Z_3 \frac{\partial}{\partial Z_3}$$

y Λ es una forma de volumen en $\mathbb{C}^4$, es una representante global de la foliación.

El punto 1 es una aplicación de un teorema de Grauert: un fibrado holomorfo definido en $\mathbb{C}^n$ es trivial.

En el estudio del punto 2 aparece una problemática difícil de resolver: en los ejemplos estudiados aparecen formas polinomiales que se obtienen mediante contracción de campos no polinomiales con una forma de volumen (ver ejemplo 4). Sin embargo no se descarta que se puedan conseguir campos polinomiales que generen la forma.

En cualquier caso, esta línea de investigación se abandonó tras la aparición del ejemplo 5, pues la extensión de los campos puede producir foliaciones por curvas cuya foliación de dimensión 2 "generada" tenga un conjunto singular de codimensión 1, y por tanto no están generando la foliación original.

Otro enfoque que se le dio al problema fue el siguiente. Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^3$ y supongamos que su haz tangente, que también denotaremos por $\mathcal{F}$, es localmente libre. En [OSS] aparece el siguiente lema (Lema 5.2.1, página 101):

Lema *Sea E un fibrado de rango 2 de $\mathbb{P}^n$ con una sección con ceros en una variedad Y, localmente intersección completa. E escinde si y sólo si Y es intersección completa global.*

Como aplicación directa tenemos que si s es una sección global de $\mathcal{F}$, con ceros en el conjunto algebraico Y_s de codimensión 2, entonces $\mathcal{F}$ es escindido si y sólo si Y_s es intersección completa.

Hay resultados que nos aseguran cuándo una curva es intersección completa. Por ejemplo, en [13] se dice que en una superficie general de grado mayor o igual que 4 cualquier curva es intersección completa.

Esto da la idea siguiente: si la foliación está definida por polinomios de grado mayor o igual a 4, puedo encontrar un campo de vectores tangente a la foliación cuyo lugar singular esté contenido en una superficie de grado 4. Si esta superficie es "general", como el campo de vectores tangente a la foliación es lo mismo que una sección de $\mathcal{F}(d)$ para cierto $d \in \mathbb{Z}$, tendremos que $\mathcal{F}(d)$ es escindido. Por tanto también lo será $\mathcal{F}$.

También se ha llevado a cabo un intento de solucionar la versión debilitada del problema.

Supongamos una foliación en $\mathbb{P}^3$ con haz tangente localmente libre y de manera que existe una subfoliación por curvas cuyo conjunto singular son puntos (codimensión 3). Entonces necesariamente el haz tangente es un fibrado escindido.

Sea ahora $\mathcal{F}$ una foliación de $\mathbb{P}^3$ de tipo GK. Como ya sabemos (ver [4]) el haz tangente es localmente libre. Si en el afín U_0 la foliación viene representada por la forma ω, entonces $d\omega = i_Z\mu$, para un determinado campo vectorial polinomial Z y una forma de volumen μ.

La integrabilidad implica que

$$i_Z\omega \equiv 0$$

luego Z define una foliación por curvas en $\mathbb{P}^3$ que es tangente a $\mathcal{F}$.

Como $\mathcal{F}$ es GK, las singularidades de Z que también lo son de ω son aisladas, lo que motiva la idea de intentar probar que *todas* los son. En cuyo caso la foliación sería escindida según hemos observado anteriormente.

Esta idea viene reforzada por el hecho de que si la foliación está representada en $\mathbb{C}^4$ por la forma Ω, entonces

$$(d+1)\Omega = i_R \mathrm{d}\Omega$$

siendo d el grado de los coeficientes de Ω (ver la demostración en la sección 3.2). Es decir, que las singularidades de $\mathrm{d}\Omega$ están contenidas en las de Ω. El problema es que no todas las singularidades de la foliación dada por Z lo son de $\mathrm{d}\Omega$.

La línea más prometedora actualmente consiste en trabajar más en el estudio de la condiciones cohomológicas que debe verificar el haz tantenge. Hay que observar que el haz tangente de una foliación es reflexivo, lo cual hace interesante el artículo [14], en el que aparecen una condición necesaria y suficiente para que un haz reflexivo arbitrario sea fibrado y una condición suficiente para que sea escindido.

Llegados a este punto hay dos opciones de trabajo:

- Interpretar la integrabilidad del haz-fibrado en cuestión como una condición de cohomología.
- Buscar un significado geométrico a las condiciones dadas en [11] y [14] para intentar esclarecer cuándo una foliación tiene haz tangente escindido.

La segunda línea de pensamiento parece que puede aportar algún resultado interesante. De hecho, parece que si exigimos algunas condiciones geométricas al lugar singular de la foliación, es posible encontrar una foliación con determinadas propiedades en el haz tangente.

3.2. Resultados

Sea $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^n$ dada por el subhaz $(T\mathcal{F}, \varphi)$ de $T\mathbb{P}^n$. Tenemos una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow T\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} T\mathbb{P}^n \xrightarrow{\pi} N\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

donde definimos

$$N\mathcal{F} = \mathrm{Coker}\varphi = T\mathbb{P}^n/\varphi(T\mathcal{F})$$

y lo llamamos haz normal de la foliación $\mathcal{F}$.

Decimos que un haz coherente $\mathcal{S}$ es libre de torsion si, para cualquier $x \in \mathbb{P}^n$, dado $m \in \mathcal{S}_x$ tal que existe $f \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})_x$ con $fm = 0$ se tiene que $m = 0$.

Proposición 3.2.1 *El haz normal $N\mathcal{F}$ es libre de torsión.*

Demostración:

Un haz localmente libre es libre de torsión, luego sólo tenemos que comprobar la propiedad en los puntos singulares.

Fijemos $x \in Z_{\mathcal{F}}$, y sean $m \in (N\mathcal{F})_x$ y $f \in (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})_x$ de modo que $fm = 0$. Tomemos $U \subset \mathbb{P}^n$ un entorno abierto de x suficientemente pequeño para que existan $\phi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ y $\mu \in T\mathbb{P}^n(U)$ de manera que $\phi_x = f$ y $\pi_x(\mu_x) = m$.

$N\mathcal{F}$ es localmente libre en $U \setminus Z_{\mathcal{F}}$, luego es libre de torsión, y tenemos que

$$\mu|_{U\setminus Z_{\mathcal{F}}} \in \varphi(T\mathcal{F})(U \setminus Z_{\mathcal{F}}).$$

Como $(T\mathcal{F}, \varphi)$ es full, tenemos que $\mu|_U \in \varphi(T\mathcal{F})(U)$, por lo cual $m = 0$ en $N\mathcal{F}_x$.

□

Sea ahora $\mathcal{F}$ una foliación en $\mathbb{P}^3$ de codimensión uno y con conjunto singular $Z_{\mathcal{F}}$ de codimensión mayor o igual que dos. Sea $(T\mathcal{F}, \varphi)$ el subhaz de $T\mathbb{P}^3$ tangente a la foliación

$$\varphi : T\mathcal{F} \to T\mathbb{P}^3$$

Definición 3.2.2 *Diremos que la foliación $\mathcal{F}$ es escindida si su haz tangente es un fibrado vectorial escindido, es decir, es isomorfo a la suma de dos fibrados de línea:*

$$T\mathcal{F} \simeq L_1 \oplus L_2$$

En esta sección vamos a dar diversas caracterizaciones de este tipo de foliaciones. En primer lugar en [4] aparece la idea de foliación generada por subfoliaciones de dimensión 1. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos foliaciones por curvas en $\mathbb{P}^3$

Definición 3.2.3 ([4]) *Una foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^3$ se dice generada por dos foliaciones por curvas $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ cuando para cualquier $p \in \mathbb{P}^3$ existe un entorno U de p y un par de campos vectoriales X_1 y X_2 que determinen a $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ respectivamente en U de manera que en ese entorno la foliación viene definida por la 1-forma $i_{X_1} i_{X_2} \mu$, siendo μ una 3-forma nunca nula en U.*

Se deduce en seguida de la definición que en tal caso que las hojas de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ están contenidas en la de $\mathcal{F}$, y que:

- Si $p \in \mathbb{P}^3 \setminus (Z_{\mathcal{G}_1} \cup Z_{\mathcal{G}_2})$ y $T_p\mathcal{G}_1 \neq T_p\mathcal{G}_2$ entonces $T_p\mathcal{F} = T_p\mathcal{G}_1 \oplus T_p\mathcal{G}_2$
- $Z_{\mathcal{F}} = Z_{\mathcal{G}_1} \cup Z_{\mathcal{G}_2} \cup \mathcal{D}$, donde

$$\mathcal{D} = \{p \in \mathbb{P}^3 \setminus Z_{\mathcal{G}_1} \cup Z_{\mathcal{G}_2} | \quad T_p\mathcal{G}_1 = T_p\mathcal{G}_2\}$$

Vamos a demostrar que esta noción coincide con la de ser escindida.

Proposición 3.2.4 *Una foliación $\mathcal{F}$ es escindida si y sólo si está generada por dos foliaciones de dimensión uno.*

Demostración: Supongamos que $T\mathcal{F} = L_1 \oplus L_2$. Las inclusiones

$$i_1 : L_1 \to T\mathcal{F}$$

$$i_2 : L_2 \to T\mathcal{F}$$

compuestas con el morfismo $\varphi : T\mathcal{F} \to T\mathbb{P}^3$ inducen en $\mathbb{P}^3$ dos foliaciones por curvas que denotaremos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Comprobemos que $\mathcal{F}$ está generada por ellas:

Sea p punto arbitrario de $\mathbb{P}^3$, $p \in U_i$, para $0 \leq i \leq 3$. En este afín, la foliación $\mathcal{F}$ se realiza como una 1-forma ω, mientras que $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ lo hacen como sendos campos $X_j = \varphi(e_j)$, siendo e_j marco de L_j en U_i, $j = 1, 2$. Vamos a comprobar que

$$\omega = i_{X_1} i_{X_2} \mu$$

siendo μ una 3-forma nunca nula en U_i. Tomemos μ' forma de volumen en U_i arbitraria. Si demostramos que para cualquier $q \in U_i \setminus Z_{\mathcal{F}}$ es

$$Ker(i_{X_1} i_{X_2} \mu'|_q) = Ker(w|_q)$$

tendremos que

$$\omega = \lambda i_{X_1} i_{X_2} \mu'$$

siendo λ una función no nula en $U_i \setminus Z_{\mathcal{F}}$. Adicionalmente probaremos que λ es una función holomorfa, y así, como $cod(Z_{\mathcal{F}}) \geq 2$, $\omega = \lambda i_{X_1} i_{X_2} \mu'$ en U_i. Tomando $\mu = \lambda \mu'$, tenemos la expresión buscada. (Observemos que la extensión según el Teorema de Hartog de λ no se anula porque $\frac{1}{\lambda}$ también se extiende a U_i).

En primer lugar, fijemos $q \in U_i \setminus Z_{\mathcal{F}}$. Como q no es punto singular:

$$Ker(w_q) = \varphi(T\mathcal{F}(q)) = \varphi(L_1(q) \oplus L_2(q))$$

Luego un vector tangente $v \in T_q\mathbb{P}^3$ pertenece a $Ker(w_q)$ si y sólo si es imagen mediante φ de una combinación lineal de e_1 y e_2, es decir, que $v \in Ker(w_q)$ implica que $v \in Ker((i_{X_1} i_{X_2} \mu')_q)$. Recíprocamente, como q es no singular, X_1 y X_2 son linealmente independientes en q, luego $Ker((i_{X_1} i_{X_2} \mu')_q) \subseteq Ker(w_q)$.

Por otra parte, para ver que la función de proporcionalidad λ es holomorfa tomamos $q \in U_i \setminus Z_{\mathcal{F}}$, y aplicamos ω al campo X que tiene por coeficientes los coeficientes de w. Entonces, en un entorno de q que no contenga puntos singulares de la foliación será:

$$\lambda(x) = \frac{\omega|_x(X_x)}{i_{X_1} i_{X_2} \mu'|_x(X_x)}$$

y por tanto holomorfa.

Recíprocamente, supongamos que la foliación está generada por dos foliaciones por curvas, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, cuyos fibrados tangentes son L_1 y L_2. Vamos a dar un isomorfismo de haces entre $T\mathcal{F}$ y $L_1 \oplus L_2$.

Sea $v \in T\mathcal{F}(U)$ para un abierto arbitrario $U \subseteq \mathbb{P}^3$. Para cada $q \in U \setminus Z_{\mathcal{F}}$ existe un entorno abierto $U_q \subseteq U \setminus Z_{\mathcal{F}}$ en el cual

$$\omega = i_{X_q^1} i_{X_q^2} \mu$$

y por tanto, al ser $\omega(\varphi \circ v) = 0$, $\varphi \circ v$ depende linealmente de X_q^1 y X_q^2 en U_q mediante funciones holomorfas

$$\varphi \circ \omega = a_q^1 X_q^1 + a_q^2 X_q^2$$

con $a_q^1, a_q^2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(U_q)$.

Las aplicaciones

$$s_i : q \longrightarrow a_q^i(q) X_q^i$$

están bien definidas en $U \setminus Z_{\mathcal{F}}$ y son holomorfas, luego se extienden como elementos de $L_i(U)$.

Así pues, podemos asociar el elemento $v \in T\mathcal{F}(U)$ con $s_1 \oplus s_2 \in L_1 \oplus L_2$ de manera biyectiva, y por tanto $T\mathcal{F} \simeq L_1 \oplus L_2$ $\square$

También se puede caracterizar a las foliaciones escindidas estudiando una representación global. En esa dirección se ha demostrado la siguiente equivalencia, una de cuyas implicaciones está demostrada en [8].

Proposición 3.2.5 *Una foliación $\mathcal{F}$ es escindida si y sólo si la 1-forma Ω en $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ se puede expresar como*

$$i_R i_X i_Y \mu$$

siendo X e Y dos campos de vectores con coeficientes polinomiales homogéneos y R el campo radial.

Demostración: En primer lugar, supongamos que la foliación $\mathcal{F}$ viene representada en $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ por la 1-forma $\Omega = i_R i_X i_Y \mu$, con X e Y dos campos de vectores con coeficientes polinomiales homogéneos. Entonces las imágenes mediante la sucesión exacta larga de cohomología de Euler de X e Y son elementos de $H^0(\mathbb{P}^3, T\mathbb{P}^3(k_1))$ y $H^0(\mathbb{P}^3, T\mathbb{P}^3(k_2))$ respectivamente, luego inducen dos foliaciones por curvas en $\mathbb{P}^3$ que denotaremos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$.

Para comprobar que $\mathcal{F}$ está generada por $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, fijaremos $p \in \mathbb{P}^3$ y encontraremos un entorno, U_p, en el que si las foliaciones $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ están definidas respectivamente por la 1-forma w, y los campos tangentes x e y entonces $w = i_x i_y \mu$, para una determinada 3-forma $\mu \neq 0$ en U_p.

Sea U_p un abierto afín al que pertenezca p; w, x e y la 1-forma y campos que representan a las foliaciones $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ en U_p; y μ' una 3-forma arbitraria en U_p. Sea $q \in U_p \setminus Z_{\mathcal{F}}$ y $v \in T_q\mathbb{P}^3$. Si $V \in T_x\mathbb{C}^4$, para $x \in \mathbb{C}^4$ tal que $\pi(x) = q$, y de modo que $d\pi_x(V) = v$, entonces el conjunto $\{V, X(x), Y(x), R(x)\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $\{v, x(q), y(q)\}$ lo es. Así pues,

$$\Omega_x(V) = (i_R i_X i_Y \mu)_x(V) = 0$$

si y sólo si

$$(i_x i_y \mu')_q(v) = 0$$

y por tanto, según la observación de la sección 1.4.2:

$$w_q(v) = \lambda(q)(i_x i_y \mu')_q(v)$$

con $\lambda : U_p \setminus Z_{\mathcal{F}} \to \mathbb{C}$, función que no se anula. Procediendo como en la demostración de una proposición anterior se tiene que $\lambda \in \mathcal{O}^*(U_p)$ y

$$w = i_x i_y \mu$$

tomando $\mu = \lambda\mu'$.

Recíprocamente, si la foliación $\mathcal{F}$ es escindida, está generada por dos foliaciones por curvas, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, que estarán representadas por elementos de $H^0(\mathbb{P}^3, T\mathbb{P}^3(k_1))$ y $H^0(\mathbb{P}^3, T\mathbb{P}^3(k_2))$ respectivamente. Como $H^1(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0$, podemos tomar preimágenes de estos elementos en

$$\bigoplus_4 H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k_1 + 1))$$

y

$$\bigoplus_4 H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k_2+1))$$

es decir, dos campos de vectores homogéneos en $\mathbb{C}^4$ que denotaremos X e Y.

La forma $i_R i_X i_Y \mu$ tiene por coeficientes polinomios homogéneos del mismo grado, y la contracción con el campo radial es cero. Luego define una foliación en $\mathbb{P}^3$. Si el conjunto singular de esta foliación es de codimensión mayor o igual que dos ya tendríamos el resultado, pues según lo que acabamos de demostrar $i_R i_X i_Y \Omega$ está definiendo la foliación de partida. Pero esto es evidente, pues $\{R, X, Y\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $\{x, y\}$ lo es, luego $Sing(i_R i_X i_Y \Omega) = \pi^{-1}(Sing(i_x i_y \mu))$, que es de codimensión dos por ser π una submersión. $\square$

Observación: En las condiciones de la proposición anterior, si k, k_1 y k_2 denotan la clase de Chern de los fibrados normal y tangentes de las foliaciones $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ respectivamente, entonces

$$k = k_1 + k_2 + 4$$

Proposición 3.2.6 *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 en $\mathbb{P}^3$, y $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ dos subfoliaciones por curvas distintas (todas ellas con conjunto singular de codimensión mayor o igual que 2). Si k, k_1 y k_2 denotan la clase de Chern de los fibrados normal y tangentes respectivos, $\mathcal{F}$ está generada por $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ si y sólo si $k_1 + k_2 + 4 = k$.*

Demostración: Supongamos que $k_1 + k_2 + 4 = k$. Si en cada abierto afín escribimos la 1-forma que resulta de contraer una forma de volumen con los representantes de $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$, entonces obtenemos una foliación, que denotaremos $\mathcal{F}'$, y que tiene un conjunto singular de codimensión mayor o igual a 1. Esta foliación puede ser reducida a otra que tenga conjunto singular de codimensión ≥ 2, que no puede ser otra que $\mathcal{F}$, pues coinciden en un abierto. Por tanto, si Ω' y Ω representan a $\mathcal{F}'$ y $\mathcal{F}$ respectivamente, entonces $\Omega' = F\Omega$, con F un polinomio homogéneo en $\mathbb{C}^4$.

Pero $\deg \Omega' = (k_1+1) + (k_2+1) + 1 = \deg \Omega$, luego $\deg F = 0$ y por tanto $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ $\square$

Lema 3.2.7 *Sea Ω una 1-forma en $\mathbb{C}^n$ tal que:*

1. *Sus coeficientes son polinomios homogéneos de grado r.*
2. *$\Omega(R) \equiv 0$, donde R es el campo radial.*
3. *$\Omega \wedge d\Omega = 0$*

Entonces $(r+1)\Omega = i_R d\Omega$

Demostración: Sean $(Z_1, \ldots, Z_n)$ las coordenadas de $\mathbb{C}^n$, y $\Omega = \sum_{i=1}^n P_i dZ_i$, donde P_i son polinomios homogéneos de grado r. Entonces

$$d\Omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{\partial P_i}{\partial Z_j} dZ_j \wedge dZ_i$$

y

$$
\begin{aligned}
i_R d\Omega &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\partial P_i}{\partial Z_j}(Z_j dZ_i - Z_i dZ_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} rP_i dZ_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial Z_j}Z_i dZ_j \\
&= r\Omega - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial Z_j}Z_i dZ_j
\end{aligned}
$$

Pero por otra parte, al diferenciar en $\Omega(R)\equiv 0$ obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} Z_i\frac{\partial P_i}{\partial Z_j}dZ_j + P_i dZ_i\right) = 0$$

y así :

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial Z_j}Z_i dZ_j = \Omega$$

luego

$$i_R d\Omega = (r+1)\Omega$$

□

Proposición 3.2.8 *En la situación descrita, $\mathcal{F}$ es escindida si y sólo si se puede expresar mediante Ω tal que $d\Omega$ es descomponible globalmente con dos 1-formas homogéneas.*

Demostración: En primer lugar, observemos que en $\mathbb{C}^4$ una 2-forma lineal es descomponible (i. e., puede ser expresada como el producto exterior de dos 1-formas lineales) si y sólo si se puede expresar como contracción con dos vectores.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es escindida, entonces según hemos visto $\Omega = i_R i_X i_Y \mu$, para X e Y dos campos homogéneos en $\mathbb{C}^4$. Según Lema 2.1. en [8] existe otro par de campos homogéneos $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ tales que:

1. $\deg(X) = \deg(\widetilde{X})$ y $\deg(Y) = \deg(\widetilde{Y})$
2. $\Omega = i_R i_{\widetilde{X}} i_{\widetilde{Y}}\mu$
3. $d\Omega = -(3 + \deg(X) + \deg(Y)) i_{\widetilde{X}} i_{\widetilde{Y}}\mu$

Así pues, dΩ es descomponible globalmente, pues bata tomar las 1-formas diferenciales que tengan por coeficientes los coeficientes de los campos $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$.

Recíprocamente, si la foliación está representada en $\mathbb{C}^4$ por la 1-forma Ω, de manera que dΩ es descomponible, podemos expresar dΩ como contracción de dos campos X e Y homogéneos, y así:

$$\Omega = \frac{1}{d+1} i_R i_X i_Y \Omega$$

donde d es el grado de la foliación. Por tanto, en virtud de la proposición 3.2.5 la foliación es escindida. $\square$

Bibliografía

Libros

[BO] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, Academic Press, Inc., (1986).

[AM] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to conmutative algebra*, Addison-Wesley, (1969).

[BR] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*, First Latin american Congress of Mathematics, IMPA, Brasil (2000).

[EI] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150 (1995), Springer Verlag.

[FR] R. Friedman, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Springer Verlag (1998).

[FU] W. Fulton *Curvas algebraicas. Introducción a la geometría algebraica*, Editorial Reverté, S. A. (1969).

[GH] P. Griffiths, J. Harris *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons (1978).

[GU] R. C. Gunning *Introduction to holomorphic functions of several variables. Volume I: Function Theory*, Wadsworth & Brooks /Cole (1990).

[HA] R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Text in Mathematics: 52 (1977).

[JO] J. P. Jouanolou *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematica 708 (1979).

[LNS] A. Lins Neto, B. Azevedo Scárdua *Folheaçoes Algébricas Complexas*, IMPA, 21º Colóquio Brasileiro de matemática (1997).

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler *Vector Bundles on Complex Projective Spaces (Progress in Mathematics, 3)*, Birkhäuser, Basel (1980).

[WA] F. W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer. Graduate Text in Mathematics (1983).

[WE] R. O. Wells *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer-Verlag (1973).

Artículos

[1] E. Ballico, *On the local structure of holomorphic foliation singularities*, Topology and its Applications 115 (2001), 235-238.

[2] P. Baum, R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Differential Geometry 7 (1972), 279-342.

[3] O. Calvo-Andrade *Irreducible components of the space of holomorphic foliations*, Math. Ann. 299, n0. 4 (1994), 751-767.

[4] O. Calvo-Andrade, D. Cerveau, L. Giraldo, A. Lins Neto *Irreducible components of the space of foliations associated to the affine Lie algebra*, Ergod. Th & Dynam. Sys 24 (2004), 987-1014.

[5] C. Camacho, A. Lins Neto *The topology of integrable diffeential forms near a singularity*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 55 (1982), 5-35.

[6] D. Cerveau, A. Lins Neto *Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $CP(n)$, $n \geq 3$*, Annals of Mathematics, 143 (1996), 577-612.

[7] D. Cerveau, A. Lins Neto, S. J. Edixhoven *Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$*, Algebraic Geom. 10, no. 4 (2001), 695-711.

[8] F. Cukierman , J. V. Pereira *Stabiliy of holomorphic foliations with split tangent sheaf.* Prepublicación, arxiv:math.CV/0511060v3 (2007). Aparecerá en American Journal of Mathematics.

[9] X. Gómez-Mont, *On families of rational vector fields*, SMM/Aportaciones Matemáticas, Notas de Investigación No. 1 (1985), 36-65.

[10] X. Gómez-Mont, A. Lins Neto *Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral*, Topology 30, no. 3 (1991), 315-334.

[11] H. S. Luk, S. T. Yau, *Cohomology and Splitting Criterion for Holomorphic Vector Bundles on $\mathbb{CP}^n$*, Math. Nachr. 161 (1993) 233-238.

[12] A. S. de Medeiros *Singular foliations and differential p-forms*, Ann Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 9, no. 3 (2000), 451 466.

[13] L. Robbiano, *A problem of complete intersections*, Nargoya Math. J. Vol. 52 (1973), 129-132.

[14] M. Roggero, P. Valabrega, *Chern classes and cohomology for rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 150, No. 2 (1991), 383-395.

[15] J. Yoshizaki, *On the structure of the singular set of a complex analytic foliation*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 50, No. 4, (1998), 837-857.